# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УДК 330.43+336.717.061.1

**С.С. Подлужный**[1]
*Уральский федеральный университет*
*имени первого Президента России Б.Н.Ельцина,*
*г. Екатеринбург, Россия*

## О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ДЕФОЛТА КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА

**Аннотация.** В настоящий момент российская банковская система находится в состоянии трансформации: требования Центрального банка РФ по внедрению в российской банковской системе стандартов Базельского соглашения по банковскому надзору требуют от коммерческих банков создания новых инструментов анализа кредитных рисков. Базельское соглашение по банковскому надзору предполагает внедрение в банковский анализ таких мер риска, как вероятность дефолта заемщика в течение года (probability of default). Коммерческие банки игнорируют тот факт, что после принятия кредитного риска (выдачи ссуды) основным источником неопределенности становится изменение вероятности дефолта каждого отдельного заемщика. Таким образом, в банковской практике не учитывается риск увеличения вероятности дефолта и, как следствие, ухудшения качества кредитного портфеля коммерческого банка. В связи с этим в настоящей работе предлагается рассмотреть изменение вероятности дефолта как случайную величину и определить параметры распределения изменения вероятности дефолта коммерческого банка на практических данных. Предметом исследования настоящей работы является изменение вероятности дефолта кредитного портфеля банка. Для проверки гипотезы о нормальности распределения в настоящей работе использован инструментарий математической статистики и метод моментов. Гипотеза проверена и подтверждена на исторических данных о кредитном портфеле коммерческого банка. Таким образом, была предположена и подтверждена на практических данных нормальность распределения изменения вероятности дефолта кредитного портфеля коммерческого банка. Данное наблюдение является важным с точки зрения управления кредитным портфелем коммерческого банка и оптимизации банковских процессов. Знание вида и параметров распределения изменения вероятности дефолта кредитного портфеля позволит коммерческим оперативно реагировать на прогнозируемые изменения вероятности дефолта кредитного портфеля и вовремя производить ребалансировку составляющих кредитного портфеля, что повысит устойчивость банковской системы.

***Ключевые слова:*** кредитный портфель; вероятность дефолта; изменение вероятности дефолта; нормальное распределение; коммерческие банки; потери при дефолте; сумма под риском; ожидаемые потери; дистанция до дефолта; критерия Пирсона.

### Актуальность

В условиях перехода российской банковской системы на регуляторные требования Базельского соглашения по банковскому надзору (Базель II и Базель III) [13] банки заинтересованы в интеграции передовых методов управления рисками в бизнес-процессы банка. Схема интеграции систем риск-менеджмента в банковские процессы, в том числе в кредитный процесс, является одним из основных принципов Базельского соглашения по банковскому надзору. Система интегрированного риск-менеджмента охватывает такие основополагающие части банковского менеджмента, как построение оптимального кредитного процесса и управ-

ление кредитным портфелем коммерческого банка. Основное внимание в банковской практике управления кредитным процессом уделяется показателю вероятности дефолта [2]. Одновременно с этим банки не уделяют должного внимания мониторингу вероятности дефолта после принятия кредитного риска (выдачи ссуды). После выдачи кредита основным источником неопределенности становится изменение вероятности дефолта каждого отдельного заемщика [20]. Таким образом, банки не учитывают риск увеличения вероятности дефолта и возможное ухудшение качества кредитного портфеля коммерческого банка, что ставит под угрозу финансовую состоятельность как отдельных банков, так и всей банковской системы. Наибольшей угрозой стабильному функционированию банковской системы в условиях волатильности на финансовых рынках, глобализации и увеличения кризисных явлений в экономике является несовершенство внутрибанковских процессов и неэффективное управление кредитным портфелем, обусловленных в том числе отсутствием в банковской практике анализа потенциальных изменений вероятности дефолта. В настоящей работе выдвигается предположение о том, что изменение вероятности дефолта является нормально-распределенной случайной величиной.

В банковской практике рассчитываются два показателя вероятности дефолта:

*1.* $PD_{PIT}$ (Point in Time) – значение *PD*, откалиброванное по уровню дефолтов сегмента на текущий момент времени. Используется для ценообразования краткосрочных продуктов и стресс-тестирования.

*2.* $PD_{TTC}$ (Through the Cycle) – значение *PD*, откалиброванное по долгосрочному среднему уровню дефолтов. Используется для ценообразования долгосрочных продуктов, резервирования по МСФО и расчета регуляторного и экономического капитала [3].

Расчет потерь при дефолте (*LGD*, Loss Given Default) позволяет определить долю суммы под риском, которая будет потеряна в случае дефолта заемщика. Величина потерь при дефолте – средняя ожидаемая доля потерь при дефолте [4]. Представляет собой отношение утраченной в результате дефолта задолженности к совокупной величине задолженности на момент дефолта (выражается в долях или процентах). Для расчета уровня потерь при дефолте необходимы следующие данные:

1. Состав и стоимость обеспечения по видам и категориям качества.
2. Степень ликвидности обеспечения.
3. Значимость обеспечения для бизнеса.
4. Источник оценки стоимости обеспечения (внутренний/внешний).
5. Рейтинг поручителя, гаранта, эмитента (для поручительств, гарантий и ценных бумаг).
6. Размер ссуды.

Стоимость под риском дефолта (Exposure at Default) – сумма задолженности на момент входа заемщика в дефолт, потенциальный объем задолженности контрагента перед банком на момент дефолта заемщика, определяется в денежном выражении. *EAD* может отличаться от текущей задолженности, если существует вероятность увеличения задолженности заемщика по мере приближения дефолта. Как правило, тип кредитного продукта является основным движущим фактором *EAD*. Поскольку это неизвестно в момент оценки *EL*, *EAD* можно вычислить только на основе исторических тенденций, предполагая, что эти тенденции свидетельствуют о будущем поведении имеющегося портфеля.

[1] *Подлужный Сергей Сергеевич* – старший преподаватель кафедры моделирования управляемых систем, Высшей школы экономики и менеджмента Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия (620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19); e-mail: sergey.podluzhnyy@gmail.com.

Риск-метрики вероятность дефолта, потери в случае дефолта и сумма под риском дефолта являются базой для расчета ожидаемых потерь по ссуде (Expected losses, *EL*) [5]. Ожидаемые потери по ссуде – показатель прогнозируемых среднестатистических потерь, отображает уровень кредитного риска по сделке на горизонте ближайшего года. Величина ожидаемых потерь по ссуде является приближением уровня резервирования по сделке по стандартам МСФО [1]. Ожидаемые потери являются аддитивной величиной и не учитывают уровень концентрации и диверсификации. Абсолютная величина ожидаемых потерь по ссуде рассчитывается как произведение вероятности дефолта, потерь в случае дефолта и суммы под риском дефолта: $EL(t) = PD(t)LGD(t)EAD(t)$. Относительная величина ожидаемых потерь по ссуде рассчитывается как произведение вероятности дефолта и потерь в случае дефолта: $EL(t) = PD(t)LGD(t)$.

**Степень проработанности проблемы**

Проблематика оптимизации кредитного портфеля коммерческого банка и определения вероятностных характеристик риск-метрик поднималась в научных работах таких российских и иностранных авторов, как В.В. Акбердина [1, 2], Г. Кауфман [11], Р. Каплан [12], Дж. Халл [15–18], Э. Альтман [10].

Впервые гипотезу о том, что расчет вероятности дефолта связан с нормальным распределением выдвинул Р. Мертон [19]. Он рассматривал долг компании как требование, которое возможно к обращению на стоимость активов компании и использовал формулу Блэка – Шоулза [14] цены опциона для оценки вероятности дефолта заемщика. Пусть $V_t$ – стоимость активов заемщика в момент *t*. При наступлении срока платежа по кредиту в момент времени *T* кредиторы предъявляют требования погашения задолженности в размере номинальной суммы долга – *D*. В модели предполагается, что кредитный портфель заемщика представлен одним кредитором с суммой задолженности *D*. При этом сумма долга уплачивается единовременно в момент времени *T*. В случае, если долг обеспечен активами компании ($V_T \geq D$), на долю акционеров приходится величина $V_T - D$. Для случая, когда долг не полностью обеспечен активами компании ($V_T < D$), кредиторам остается сумма, имеющаяся в наличии. В этом случае акционеры не получают ничего по причине приоритета требований кредиторов над требованиями акционеров в случае банкротства. Согласно модели Мертона, сумма, полученная кредиторами в момент *T*, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} D_T, V_T \geq D \\ V_T, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Данная модель используется при принятии предпосылок о том, что стоимость активов фирмы $V_T$ распределена нормально с волатильностью σ и безрисковая ставка *r* является постоянной. Тогда по формуле Блэка – Шоулза стоимость опциона в момент *t* составит:

$$P = D \cdot e^{-r(T-t)} N(-d + \sigma\sqrt{T-t}) - V_t N(-d),$$

где *N* – интегральная функция стандартного нормального распределения, *d* – вероятность исполнения опциона. В данном случае вероятность исполнения опциона будет эквивалентна вероятности дефолта заемщика:

$$d = \frac{\ln(V_t / D) + (r + \sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Модель Мертона получила дальнейшее развитие в модели CreditMonitor, которая позволяет оценить кредитный риск компаний, имеющих листинг на фондовой бирже.

Процедура оценки вероятности дефолта состоит из следующих этапов:

1. Определение критической *DP*. При падении рыночной цены активов фирмы ниже критической точки заемщик переходит в состояние дефолта. В общем случае точка дефолта равна сумме половины долгосрочных обязательств и краткосрочных обязательств заемщика.
2. Точка дефолта используется для расчета волатильности и стоимости активов фирмы.
3. Расчет расстояния до дефолта (количество стандартных отклонений до точки дефолта) на основе полученных данных. Определение такого падения стоимости активов заемщика, при котором заемщик объявит дефолт [8].

$$DD = \frac{V_t - DP}{\sigma V_t}.$$

Сравнение рассчитанного расстояния до дефолта заемщика с историческими данными базы данных CreditMonitor и определение частоты дефолта (рис. 1) [9].

В данных исследованиях нормальность распределения изменения вероятности дефолта затрагивается лишь косвенно, из чего следует необходимость факта нормальности распределения изменения вероятности дефолта на эмпирических данных.

**Методика исследования**

В работе выдвигается предположение о том, что распределение изменения вероятности дефолта кредитного портфеля является суммой распределений изменения вероятности дефолта входящих в кредитный портфель заемщиков. Соответственно, по центральной предельной теореме, распределение изменения вероятности дефолта кредитного портфеля будет стремиться к нормальному распределению.

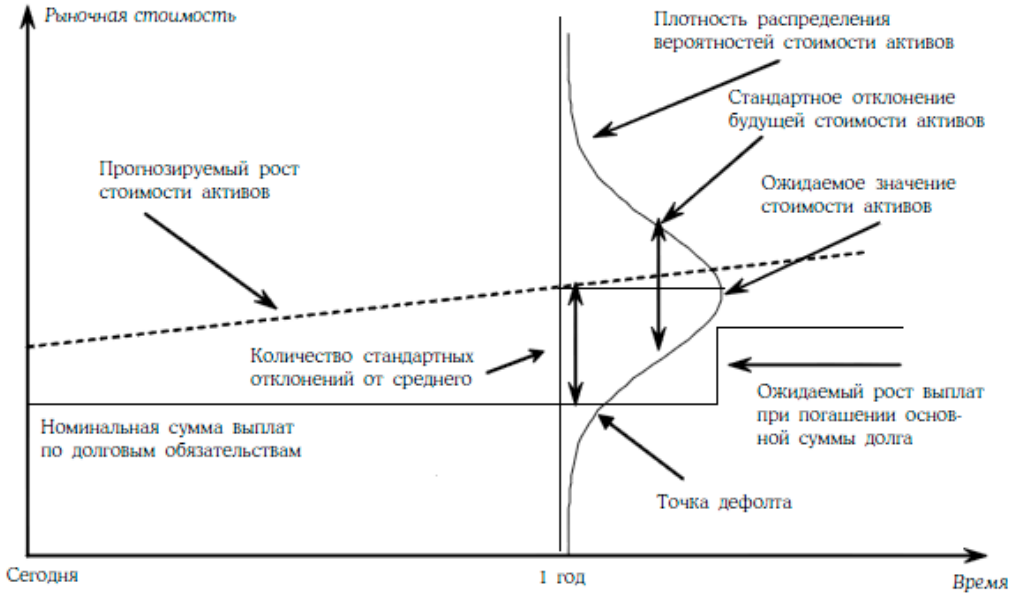


*Рис. 1. Определение дистанции до дефолта*

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

График плотности нормального распределения представлен на рис. 2.

Математическое ожидание нормального распределения равно параметру $a$. Среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру σ. Коэффициент асимметрии $A_S$ и эксцесс $E_S$ нормального распределения равны нулю: $A_S = 0$ и $E_S = 0$ [6].

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины $X$ в заданный интервал $(x_1; x_2)$ определяется по формуле (1):

$$P(x_1 \le X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} dz.$$

Для проверки гипотезы о нормальности распределения изменения вероятности дефолта кредитного портфеля банка в работе рассмотрены фактические данные о вероятности дефолта кредитного портфеля отдела кредитования юридических лиц Уральского филиала крупнейшего в России коммерческого банка за период с 01.04.2011 по 01.07.2015.

Исследование гипотезы о виде распределения изменения вероятности дефолта кредитного портфеля включает следующие этапы:

1. Составление статистических распределений выборочной совокупности.
2. Нахождение параметров статистического распределения.
3. Установление закона распределения выборочной совокупности.

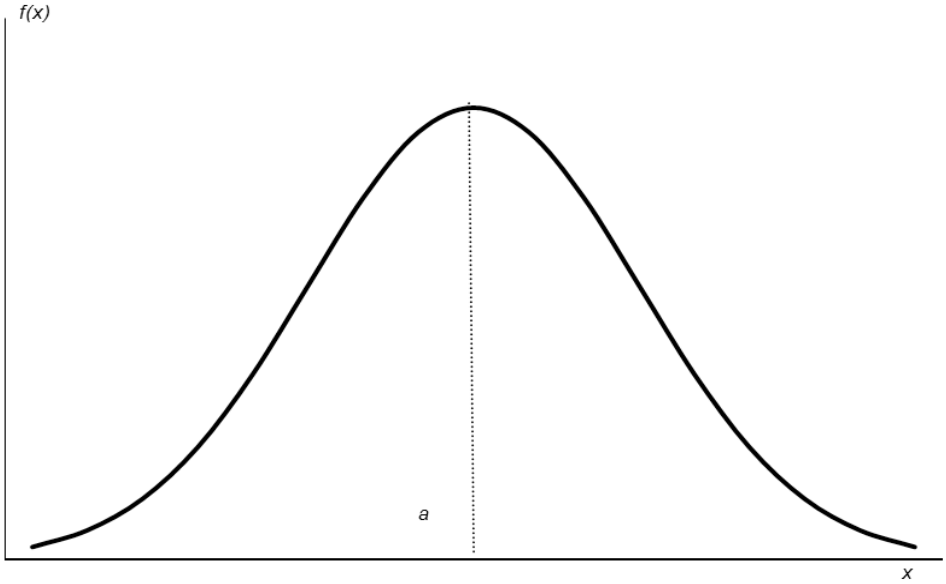


*Рис. 2. График плотности нормального распределения вероятностей*

Для составления статистических распределений выборочных совокупностей необходимо:

1. Найти минимальное и максимальное значения случайной величины в выборке.
2. Выбрать количество интервалов для выборки. Количество интервалов $k$ (целое число) целесообразно определить по формуле Старджесса $k = 1 + 3,322 \cdot \lg n$.
3. Определить их длину по формуле $h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k}$.
4. Установить границы интервалов выборки.
5. Распределить случайную величину по интервалам.
6. Подсчитать частоты, относительные частоты и плотность попадания случайной величины в интервалы выборки.
7. Построить гистограмму относительных частот статистического распределения выборки.

Информация о характеристиках выборки изменений вероятностей дефолта систематизирована в табл. 2.

Таблица 1

Изменение вероятности дефолта кредитного портфеля

| **Дата** | **Вероятность дефолта кредитного портфеля, %** | **Изменение вероятности дефолта, %** |
|---|---|---|
| 01.07.2015 | 1,370 | 0,19 |
| 01.04.2015 | 1,56 | 0,15 |
| 01.01.2015 | 1,71 | -0,84 |
| 01.10.2014 | 0,87 | 0,75 |
| 01.07.2014 | 1,63 | -0,31 |
| 01.04.2014 | 1,32 | 0,00 |
| 01.01.2014 | 1,31 | -0,07 |
| 01.10.2013 | 1,25 | 0,10 |
| 01.07.2013 | 1,35 | 0,15 |
| 01.04.2013 | 1,49 | -0,15 |
| 01.01.2013 | 1,34 | -0,11 |
| 01.10.2012 | 1,23 | 0,09 |
| 01.07.2012 | 1,32 | -0,21 |
| 01.04.2012 | 1,11 | 0,20 |
| 01.01.2012 | 1,32 | 0,35 |
| 01.10.2011 | 1,67 | 0,47 |
| 01.07.2011 | 2,14 | -0,56 |
| 01.04.2011 | 1,58 | |

Таблица 2

Характеристики выборки изменений вероятности дефолта

| $X_{min}$ | $X_{max}$ | $k = 1 + 3,322 \cdot \lg n$ | $h = \frac{X_{max} - X_{min}}{k}$ |
|---|---|---|---|
| -0,84 % | 0,75 % | 6 | 0,27 % |

Таблица 3

Статистические распределения

| $(X_i; X_{i+1})$ | | $N_i$ | $N_i / Nh$ |
|---|---|---|---|
| -0,84 % | -0,57 % | 1 | 22,18926 |
| -0,57 % | -0,31 % | 2 | 44,37851 |
| -0,31 % | -0,04 % | 4 | 88,75702 |
| -0,04 % | 0,22 % | 7 | 155,3248 |
| 0,22 % | 0,49 % | 2 | 44,37851 |
| 0,49 % | 0,75 % | 1 | 22,18926 |

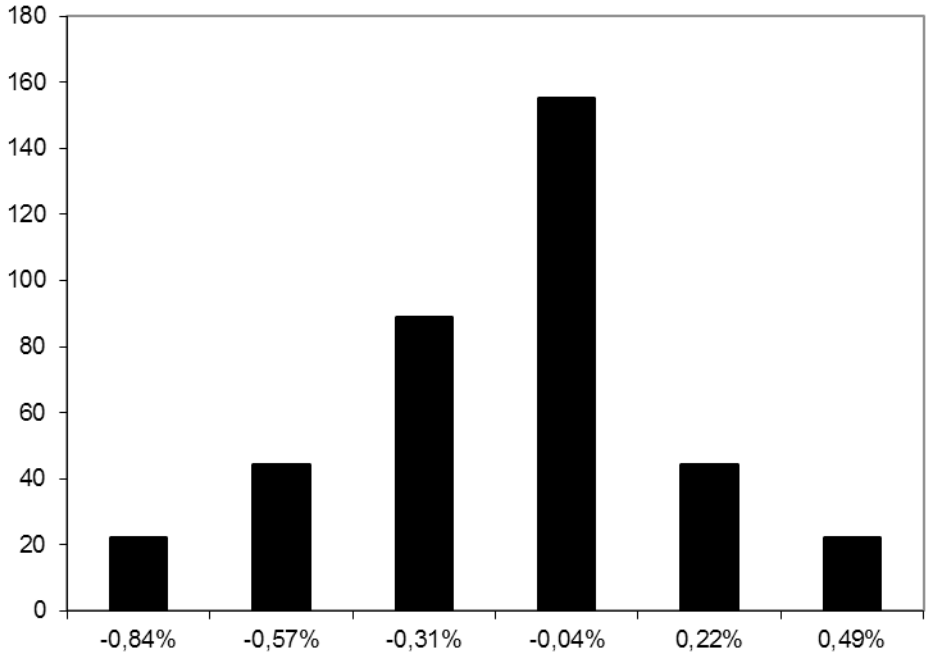


*Рис. 3. Гистограмма относительных частот*

Для нахождения параметров статистического распределения необходимо вычислить:

1) выборочную среднюю по формуле $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$;

2) выборочное среднее квадратическое отклонение по формуле $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;

3) начальные эмпирические моменты первого, второго, третьего и четвертого порядка по формуле $M_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^s}{n}$;

4) центральные эмпирические моменты первого, второго, третьего и четвертого порядка по формулам $m_2 = M_2 - M_1^2$; $m_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$; $m_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4$;

5) коэффициент асимметрии по формуле $A_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^3 \cdot n_i}{n \cdot \sigma_в^3} = \frac{m_3}{\sigma_в^3}$.

При вычислении перечисленных выше параметров статистических распределений следует за интервал принять середину интервала $x_i^* : x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$.

Вычисления начальных эмпирических моментов представлены в табл. 4. Вычисления центральных эмпирических моментов представлены в табл. 5. Вычисления коэффициента асимметрии, эксцесса и коэффициента вариации представлены в табл. 6.

Таблица 5

Центральные эмпирические моменты

| Параметр | Значение |
|---|---|
| $m_2$ | 0,00000997017276 |
| $m_3$ | - 0,0000000065982 |
| $m_4$ | 0,0000000002907 |

Для установления закона распределения изменения вероятности дефолта необходимо:

1. Сопоставить вид плотности эмпирического и теоретического распределений.
2. Сравнить коэффициенты асимметрии, эксцессы и коэффициенты вариации статистического и теоретического распределений.

Таблица 4

Начальные эмпирические моменты

| $x_i^*$ | $\frac{n_i}{n}$ | $x_i^* \frac{n_i}{n}$ | $x_i^{*2} \frac{n_i}{n}$ | $x_i^{*3} \frac{n_i}{n}$ | $x_i^{*4} \frac{n_i}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -0,00705043 | 0,05882353 | -0,00041473 | 0,00000292 | -0,000000206 | 0,0000000001453 |
| -0,00439944 | 0,11764706 | -0,00051758 | 0,00000228 | -0,000000100 | 0,0000000000441 |
| -0,00174844 | 0,23529412 | -0,00041140 | 0,00000072 | -0,000000013 | 0,0000000000022 |
| 0,00090255 | 0,41176471 | 0,00037164 | 0,00000034 | 0,0000000003 | 0,0000000000003 |
| 0,00355354 | 0,11764706 | 0,00041806 | 0,00000149 | 0,0000000053 | 0,0000000000188 |
| 0,00620453 | 0,05882353 | 0,00036497 | 0,00000226 | 0,0000000141 | 0,0000000000872 |
| | $\sum$ | -0,00018904 | 0,0000100059 | -0,0000000123 | 0,000000000298 |
| | | $M1$ | $M2$ | $M3$ | $M4$ |

Таблица 6

Параметры статистического распределения

| Параметр | Значение |
|---|---|
| $\bar{x}_в = M_1$ | -0,00018904 |
| $\sigma_в = \sqrt{m_2}$ | 0,00315756 |
| $A_s^* = \frac{m_3}{\sigma_в^3}$ | -0,21 |
| $E_x^* = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3$ | -0,08 |
| $V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в}$ | -16,703324718 |

3. Сформулировать нулевую гипотезу.
4. Найти критическую точку.
5. Вычислить наблюдаемое значение критерия Пирсона.
6. Определить закон распределения выборочной совокупности.

Сопоставление вида плотности эмпирического и теоретического распределений представлено на рис. 4.

Сравнительный анализ относительных частот исследуемых выборочных совокупностей позволяет выдвинуть нулевую гипотезу $H_0$: изменение вероятности дефолта кредитного портфеля имеет нормальное распределение с параметрами $\alpha = -0{,}00018904$ и $\sigma = 0{,}00315757$.

Результаты сравнения коэффициентов асимметрии выборочных совокупностей не противоречат выдвинутым гипотезам: коэффициент асимметрии $A_s^* = -0{,}21$ и эксцесс $E_x^* = -0{,}08$ выборочной совокупности 1 сравнимы с соответствующими параметрами нормального распределения ($A_S = 0$, $E_X = 0$).

Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении изменения вероятности дефолта, необходимо:

1. Определить параметры нормального распределения по вычисленным статистическим моментам по формулам $a = \bar{x}_в$, $\sigma = \sqrt{D_в} = \sigma_в$;
2. Найти вероятности попадания случайной величины $X$ в частичные интервалы ($x_i$, $x_i$+1) по формуле

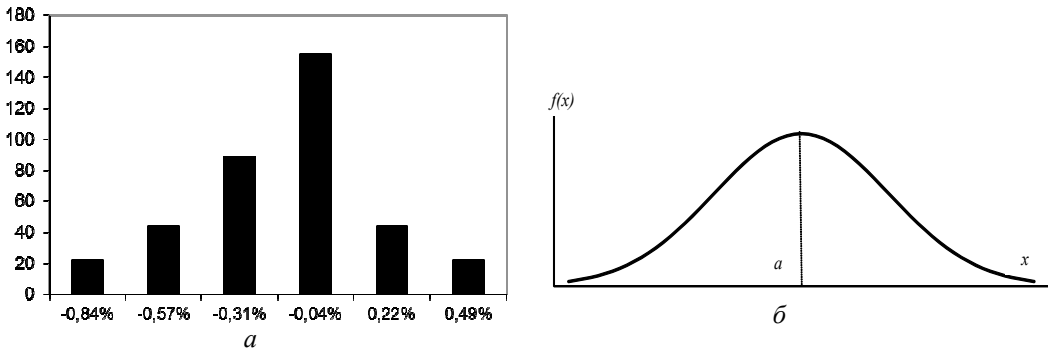


*Рис. 4. Сопоставление плотности распределений:*
*а – гистограмма относительной частоты, б – нормальное распределение*

$P_i = F(x_{i-1}) - F(x_i)$, где $F(x)$ – функция нормального распределения, $F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(z)$ – функция Лапласа;

3. Определить теоретические частоты по формуле $n_i^{'} = n \cdot P_i$.
4. Найти наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{\text{набл}}$ по формуле $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}}$.
5. Найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; r)$ по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $r = k - v - 1$, где $v$ – количество параметров распределения, найденных по выборке ($v = 2$). Критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; r)$ находят по таблице критических точек распределения $\chi^2$.
6. Сделать вывод: принять или не принять гипотезу о нормальном распределении изменения вероятности дефолта.
7. Изобразить на одних осях графики плотности нормального распределения и гистограммы относительных частот [7].

Вычисления $\chi^2_{\text{набл}}$ представлены в табл. 7.

Уровень значимости α для проверки гипотезы о нормальном распределении выбирается равным 0,05, а число степеней свободы $r$ определяется по формуле $r = k - 3$.

**Анализ полученных результатов**

Анализ эмпирических данных подтверждает выдвинутую гипотезу о нормальности распределения изменения вероятности дефолта кредитного портфеля. Результаты анализа представлены в табл. 8.

Анализируя эмпирические данные по изменению вероятности дефолта коммерческого банка можно придти к выводу, что на горизонте одного квартала ожидаемое изменение вероятности дефолта составляет -0,018 % при стандартном отклонении 0,3 %. Важным приложением настоящей работы является возможность использования правила трех сигм для прогнозирования максимально возможного изменения вероятности дефолта на обозначенном горизонте планирования, а также определение максимально возможной вероятности

Таблица 7

Вычисление наблюдаемого значения критерия $\chi^2_{\text{набл}}$

| $x_i$ | $x_{i+1}$ | $n_i$ | $F(x_i,a,\sigma)$ | $F(x_{i+1},a,\sigma)$ | $P_i$ | $n_i^{'}$ | $\frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0,838 % | -0,572 % | 1 | 0,004760 | 0,039782 | 0,035022 | 0,60 | 0,275 |
| -0,572 % | -0,307 % | 2 | 0,039782 | 0,180450 | 0,140668 | 2,39 | 0,064 |
| -0,307 % | -0,042 % | 4 | 0,180450 | 0,470473 | 0,290023 | 4,93 | 0,176 |
| -0,042 % | 0,223 % | 7 | 0,470473 | 0,778010 | 0,307537 | 5,23 | 0,601 |
| 0,223 % | 0,488 % | 2 | 0,778010 | 0,945760 | 0,167750 | 2,85 | 0,254 |
| 0,488 % | 0,753 % | 1 | 0,945760 | 0,992750 | 0,046990 | 0,80 | 0,051 |
| | | | Σ | | | | 1,420 |

Таблица 8

Проверка гипотезы о нормальном распределении изменения вероятности дефолта

| |
|---|
| Нулевая гипотеза $H_0$: выборочная совокупность имеет нормальное распределение с параметрами α = -0,00018904 и σ = 0,00315756. |
| Число степеней свободы: $k = r - 3 = 6 - 3 = 3$ |
| Уровень значимости $a = 0{,}05$ |
| Критическая точка $\chi^2_{\text{кр}} = 7{,}815$ |
| Наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{\text{набл}} = 1{,}42$ |
| Критическая область $(\chi^2_{\text{кр}}; +\infty)$ : $(7{,}815; +\infty)$ |
| Область принятия гипотезы $(0; \chi^2_{\text{кр}}) : (0; 7{,}815)$ |
| Условие принятия $H_0$ $\chi^2_{\text{набл}} \in (0; \chi^2_{\text{кр}}) : 1{,}42 \in (0; 7{,}815)$ |
| Условие непринятия $H_0$ $\chi^2_{\text{набл}} \in (\chi^2_{\text{кр}}; +\infty) : 1{,}42 \notin (7{,}815; +\infty)$ |
| Результат проверки гипотезы: выборочная совокупность 1 имеет нормальное распределение с параметрами α = -0,00018904 и σ = 0,00315756. |

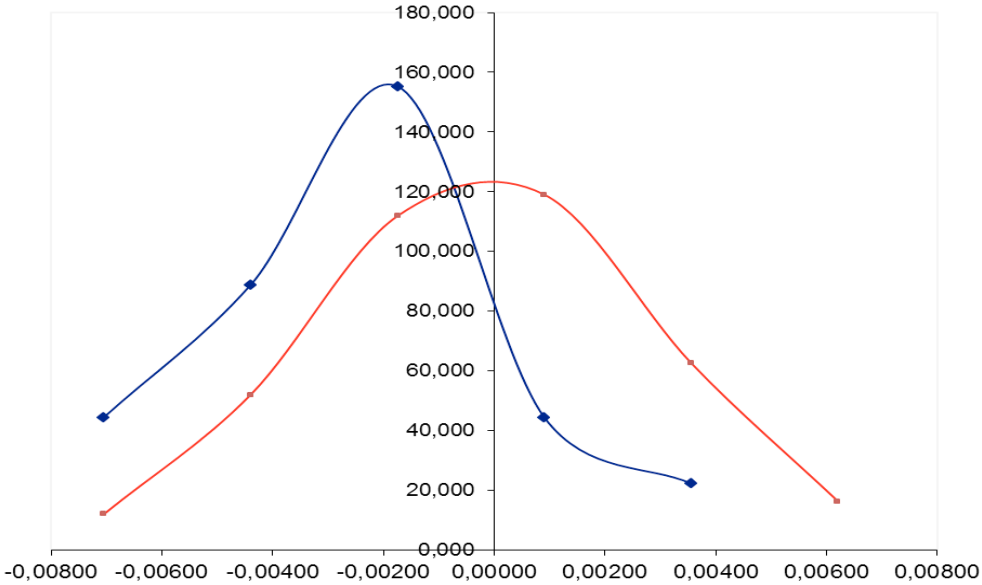


*Рис. 5. Сравнение относительных частот и плотности распределения*

дефолта кредитного портфеля в следующем периоде. С учетом нормальности распределения изменения вероятности дефолта, максимально возможное изменение вероятности дефолта с доверительной вероятностью 99,7 % по правилу трех сигм составит:

$$PD_{\max} = PD_p + dPD_{\max}$$
$$dPD_{\max} = E(dPD_p) + 3\sigma_{dPD},$$

где $dPD_{\max}$ – максимально возможное изменение вероятности дефолта кредитного портфеля, $PD_p$ – вероятность дефолта по портфелю, определяемая как линейная комбинация индивидуальных ссуд на уровне портфеля, $dPD_p$ – Изменение вероятности дефолта – случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием $E(dPD_p)$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_{dPD}$.

Для рассматриваемого в настоящей работе примера, максимально возможное ухудшение вероятности дефолта в следующем квартале с доверительной вероятностью 99,7 % по правилу трех сигм составит 0,918 %, что говорит о хорошем качестве и широкой диверсификации рассматриваемого кредитного портфеля. Следующим шагом является определение максимально возможных ожидаемых потерь по кредитному портфелю, которые рассчитываются по формуле:

$$EL_{\max} = PD_{\max} LGD_p \cdot EAD_p.$$

Здесь $LDG_p$ – потери в случае дефолта на уровне портфеля, рассчитываемые как линейная комбинация соответствующих кредитов в кредитном портфеле, $EAD_p$ – сумма под риском дефолта на уровне портфеля.

**Выводы**

Таким образом, гипотеза о нормальности распределения изменения вероятности дефолта кредитного портфеля для рассматриваемого примера подтверждается.

Знание вида и параметров распределения изменения вероятности дефолта позволит коммерческим банкам учитывать более широкий круг источников неопределенности при принятии управленческих решений и разработки внутренних нормативных документов по кредитованию, а также оперативно реагировать на прогнозируемые изменения вероятности дефолта кредитного портфеля.

## Список использованных источников

1. Акбердина В.В. Математическое моделирование экономической деятельности: прогнозирование банкротств // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Математическое моделирование экономических систем и процессов». Чебоксары, 2001. С. 4–7.
2. Акбердина В.В. Процесс банкротства на предприятиях: модели прогнозирования и оптимизация финансового учета : учебное пособие. Екатеринбург, 2000. 98 с.
3. Турбанов А., Тютюнник А. Банковское дело: Операции, технологии, управление. М., 2010. 682 с.
4. Карминский А.М., Костров А.В., Мурзенков Т.Н. Моделирование вероятности дефолта российских банков с использованием эконометрических методов. Препринт WP7/2012/04. М., 2012. 64 с.
5. Круи М., Галай Д., Марк Р. Основы риск-менеджмента / пер. с англ. М., 2011. 390 с.
6. Меняйло Г.В. Управление кредитным портфелем коммерческого банка: монография. Воронеж, 2007. 153 с.
7. Никонов О.И., Медведев М.А. Статические задачи теории портфельных инвестиций // Вестник УГТУ-

УПИ. Сер. Экономика и управление. 2008. № 3 (92). С. 72–79.

8. Фантаццини Д. Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском // Прикладная эконометрика. 2009. № 1 (13). С. 105–138.
9. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / В.Е. Барбаумов, М.А. Рогов, Д.Ф. Щукин и др. ; под ред. А.А. Лобанова, А.В. Чугунова. М., 2012. 931 с.
10. Caouette J.B., Altman E.I., Narayanan P., Nimmo R. Managing Credit Risk: the Great Challenge for Global Financial Markets / 2nd Edition. New Jersey, 2008. 627 p.
11. Kaufman G.G. Measuring Risk and Return for Bonds: a New Approach // Journal of Bank Research. 1978. Vol. 9. P. 82–90.
12. Kaplan R.S., Norton D. The Balanced Scorecard: Measures that Drive Performance // Harvard Business Review. 1992. Vol. 70, No. 1. P. 71–79.
13. Black F., Litterman R. Global Portfolio Optimization // Financial Analysts Journal. 1992. Vol. 48, No. 5. P. 28–43.
14. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81, No. 3. P. 637–654.
15. Hull J.C., White A. Dynamic Models of Portfolio Credit Risk // Journal of Derivatives. 2008. Vol. 15, No. 4. P. 9–28.
16. Hull J.C., White A. The Risk of Tranches Created from Residential Mortgages // Financial Analysts Journal. 2010. Vol. 66, No. 5. P. 54–67.
17. Hull J.C., Predescu M., White A. The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model // Journal of Credit Risk. 2010. Vol. 6, No. 3. P. 99–132.
18. Sinkey J.F. Commercial Bank Financial Management in the Financial Services Industry. Upper Saddle River, 1998.
19. Merton R.C. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates // Journal of Finance. 1974. Vol. 29, No. 2. P. 449–470.
20. Podluzhnyy S., Kruglikov S. Searching for the Credit Portfolio Structure and Building Portrait of Prospective Borrower // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, Issue 25. P. 231–235.

**Podluzhnyy S.S.**
*Ural Federal University*
*named after the First President of Russia B.N. Yeltsin,*
*Ekaterinburg, Russia*

## ON THE DISTRIBUTION OF CHANGE OF PROBABILITY OF DEFAULT OF CREDIT PORTFOLIO OF A COMMERCIAL BANK

**Abstract.** At the moment, the Russian banking system is in a state of transformation: the requirements of the Central Bank of Russia to introduce the standards of the Basel Agreement on Banking Supervision in the Russian banking system require that commercial banks create new instruments for analyzing credit risks. The Basel Agreement on Banking Supervision presupposes the introduction of such risk measures into the banking analysis as the probability of default of the borrower during the year (probability of default). Commercial banks ignore the fact that after accepting credit risk (issuing a loan), the main source of uncertainty is the change in the probability of default of each individual borrower. Thus, the banking practice does not take into account the risk of increasing the probability of default and, as a result, deterioration in the quality of the commercial bank's loan portfolio. In this regard, in this paper it is proposed to consider the change in the probability of default as a random variable and determine the parameters for the distribution of the probability of a default of a commercial bank on practical data. The subject of this study is the change in the probability of default of the bank's loan portfolio. To test the hypothesis of the normality of the distribution, the paper uses the toolkit of mathematical statistics and the method of moments. The hypothesis is verified and confirmed on the basis of historical data in the commercial bank's loan portfolio. The normality of the distribution of the probability of default of the credit portfolio of a commercial bank was assumed and confirmed on practical data. This observation is important from the point of view of managing the loan portfolio of a commercial bank and optimizing banking processes. Knowledge of the type and parameters of the distribution of changes in the likelihood of default of the loan portfolio will allow the commercial bank to react quickly to projected changes in the probability of default of the loan portfolio and to timely rebalance the components of the loan portfolio, which will increase the stability of the banking system.

***Key words:*** loan portfolio; probability of default; change in probability of default; normal distribution; commercial banks; loss given by default; exposure at default; expected losses; distance to default; Pearson criterion.

## References

1. Akberdina, V.V. (2001). Matematicheskoe modelirovanie ekonomicheskoi deiatel'nosti: prognozirovanie bankrotstv [Mathematical modelling of economic activity: Bankruptcy prediction]. *Proceedings of all-Russia scientific conference "Mathematical Modeling of Economic Systems and Processes"*. Cheboksary, 4–7.
2. Akberdina, V.V. (2000). Protsess bankrotstva na predpriiatiiakh: modeli prognozirovaniia i optimizatsiia finansovogo ucheta *[The Process of Corporate Bankruptcy: Prediction*

*Models and Optimization of Financial Accounting].* Ekaterinburg.

3. Turbanov, A., Tiutiunnik, A. (2010). *Bankovskoe delo: Operatsii, tekhnologii, upravlenie [Banking: Operations, Technologies, Management].* Moscow.
4. Karminskii, A.M., Kostrov, A.V., Murzenkov, T.N. (2012). *Modelirovanie veroiatnosti defolta rossiiskikh bankov s ispol'zovaniem ekonometricheskikh metodov (Approaches to Evaluating the Default Probabilities of Russian Banks with Econometric Methods).* Working paper WP7/2012/04. Moscow, Higher School of Economics.
5. Crouhy, M., Mark, R., Galai, D. (2014). *The Essentials of Risk Management.* McGraw-Hill Education.
6. Meniailo, G.V. (2007). *Upravlenie kreditnym portfelem kommercheskogo banka: monografiia [Credit Portfolio Management at a Commercial Bank].* Voronezh.
7. Nikonov, O.I., Medvedev, M.A. (2008). Staticheskie zadachi teorii portfel'nykh investitsii [Statistic Tasks of the Theory of Portfolio Investment]. *Vestnik UGTU-UPI. Ser. Ekonomika i upravlenie [Bulletin of Ural Federal University. Series Economics and Management],* No. 3 (92), 72–79.
8. Fantazzini, D. (2009). Econometric Analysis of Financial Data in Risk Management. *Prikladnaia ekonometrika (Applied Econometrics),* No. 1 (13), 105–138.
9. Barbaumov, V.E., Rogov, M.A., Shchukin, D.F. (2012). *Entsiklopediia finansovogo risk-menedzhmenta [Encyclopedia of Financial Risk Management].* Moscow, Alpina Business Books.
10. Caouette, J.B., Altman, E.I., Narayanan, P., Nimmo, R. (2008). *Managing Credit Risk: the Great Challenge for Global Financial Markets.* 2nd Edition. New Jersey, John Wiley and Sons, 627.
11. Kaufman, G.G. (1978). Measuring Risk and Return for Bonds: a New Approach. *Journal of Bank Research,* Vol. 9, 82–90.
12. Kaplan, R.S., Norton, D. (1992). The Balanced Scorecard: Measures that Drive Performance. *Harvard Business Review,* Vol. 70, No. 1, 71–79.
13. Black, F., Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal,* Vol. 48, No. 5, 28–43.
14. Black, F., Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy,* Vol. 81, No. 3, 637–654.
15. Hull, J.C., White, A. (2008). Dynamic Models of Portfolio Credit Risk. *Journal of Derivatives,* Vol. 15, No. 4, 9–28.
16. Hull, J.C., White, A. (2010). The Risk of Tranches Created from Residential Mortgages. *Financial Analysts Journal,* Vol. 66, No. 5, 54–67.
17. Hull, J.C., Predescu, M., White, A. (2010). The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model. *Journal of Credit Risk,* Vol. 6, No. 3, 99–132.
18. Sinkey, J.F. (1998). *Commercial Bank Financial Management in the Financial Services Industry.* Upper Saddle River, Prentice – Hall.
19. Merton, R.C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance,* Vol. 29, No. 2, 449–470.
20. Podluzhnyy, S., Kruglikov, S. (2015). Searching for the Credit Portfolio Structure and Building Portrait of Prospective Borrower. *IFAC-PapersOnLine,* Vol. 48, Issue 25, 231–235.

## Information about the author

***Podluzhny Sergey Sergeevich*** **–** Senior Lecturer, Department of Modeling Control Systems, Higher School of Economics and Management, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia (620002, Ekaterinburg, Mira street, 19); e-mail: sergey.podluzhnyy@gmail.com.

***Для цитирования:*** Подлужный С.С. О виде распределения изменения вероятности дефолта кредитного портфеля коммерческого банка // Вестник УрФУ. Серия экономика и управление. 2017. Т. 16, № 6. С. 969–984. DOI: 10.15826/vestnik.2017.16.6.046.

***For Citation:*** Podluzhny S.S. On the Distribution of Change of Probability of Default of Credit Portfolio of a Commercial Bank. *Bulletin of Ural Federal University. Series Economics and Management,* 2017, Vol. 16, No. 6, 969–984. DOI: 10.15826/vestnik.2017.16.6.046.

***Информация о статье:*** дата поступления 3 июля 2017 г.; дата принятия к печати 7 сентября 2017 г.

***Article Info:*** Received July 3, 2017; Accepted September 7, 2017.