

Экономико-математические модели

О.И. Никонов, проф., докт. физ.-мат. наук, А.В. Луценко,
г. Екатеринбург, ГОУ УГТУ-УПИ

СИНТЕЗИРОВАННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ КАПИТАЛОМ

Введение. В современных условиях эффективная работа на организованном рынке ценных бумаг предполагает применение наукоемких технологий анализа и прогноза количественных характеристик фондовых инструментов, использование прикладного программного обеспечения, применения арсенала математических и информационно-аналитических технологий, ориентированных на формирование и эффективное управление инвестиционным портфелем. При повышающемся уровне организации рынка и жесткой конкурентной борьбе банков, инвестиционных фондов и компаний за клиента разработка и использование адекватных стратегий управления инвестиционным капиталом стали актуальной задачей.

Начало серьезных теоретических разработок в области математического обеспечения финансового менеджмента связывают с появлением в 1900 г. работы Л. Башелье [1], посвященной моделированию процессов изменения рыночных цен фондовых активов. Развитие теории вероятностей, математической статистики, формирование стохастического исчисления наряду с появлением и совершенствованием вычислительных средств и методов позволило во второй половине XX века рассматривать новые классы задач, связанных моделированием финансово-экономических процессов. К настоящему времени сформировался целый блок научных дисциплин, относящихся к финансовой проблематике и изучающих экономические, математические, информационно-аналитические и иные теоретические и прикладные аспекты данного круга вопросов. Получен ряд фундаментальных результатов, среди которых отметим работы [2-5], породившие новые научные направления, инициировавшие создание новых научных школ и новые научно-прикладные исследования.

Мы выделим два направления исследований, ориентированных на непосредственное использование в практике финансового дилинга. Первое направление относится к разработке активных стратегий и инструментальных средств управления вложениями в отдельные фондовые активы. Это направление включает широкий спектр вопросов, от достаточно простых методов техниче-

ского анализа [6-7] до сложных математических моделей эволюции финансовых индексов, частично реализованных в виде программных продуктов и предназначенных для прогнозирования тенденций изменения цен фондовых активов. При этом используются разнообразные технологии: от анализа геометрических фигур, отражающих историю цены актива, до современных нейросетевых технологий [8-9], моделирующих функции человеческого мозга.

Второе направление относится к теории портфельных инвестиций, рассмотренных в работах [2-3], где цель исследования состоит в анализе совокупного эффекта от вложений в различные активы с учетом их взаимовлияния. Числовые характеристики риска и доходности отдельных активов, а также степень их взаимозависимости определяются в теоретико-вероятностных терминах и на практике оцениваются статистическими методами. Отдельные аспекты моделирования динамического управления инвестиционным портфелем изучались в работах [4-5, 10-11].

В настоящей работе делается попытка в определенном смысле объединить два описанных выше подхода. А именно, вводится понятие синтезированного финансового инструмента, представляющего собой совокупность фондового актива и активной стратегии его использования. Такая пара представляет собой фактически новый финансовый инструмент, актив с новыми характеристиками, который может рассматриваться как самостоятельный объект, как инструмент фондового рынка, который может быть включен в портфель инвестора.

Предлагаемый подход, на наш взгляд, существенно расширяет возможности инвестора, что особенно важно в условиях российского фондового рынка с его пока весьма ограниченным набором ликвидных фондовых активов.

1. Активные стратегии управления капиталом на фондовом рынке

Термин *активная стратегия* мы далее будем использовать для обозначения системы поддержки принятия решений по вложению средств в определенный фондовый актив. Такая система предполагает анализ текущей рыночной информации и может представлять собой комплекс правил, базирующихся на математической или эвристической модели, реализованной, как правило, в виде программного продукта. Результатом работы системы в каждый момент времени является сигнал либо на покупку, либо на продажу актива, или на сохранение текущей позиции. Таким образом, применение конкретной активной стратегии предполагает, что инвестор действует в соответствии с получаемыми рекомендациями, изменяя или сохраняя позиции по рассматриваемому активу. Как отмечалось во введении, прогнозная модель, лежащая в основе активной стратегии, может быть достаточно простой и представлять собой (автоматизированный) анализ геометрических фигур, отражающих историю цены актива. Более сложные индикаторы технического анализа, как правило, содержат один или несколько настроечных параметров, поэтому в контексте данной работы одному индикатору соответствует целое семейство активных стратегий, свойства которых зависят от соответствующих настроек. И наконец, в настоящее

время широкую популярность приобрели весьма сложные и дорогостоящие нейросетевые пакеты, позволяющие с большей точностью прогнозировать динамику цены актива. Последние, разумеется, также можно рассматривать в качестве базисных элементов активной стратегии. Таким образом, набор существующих программно-аналитических средств для построения активных стратегий весьма широк.

Ниже будут приведены и проанализированы некоторые активные стратегии управления капиталом. Здесь отметим лишь, что термин *активная стратегия* может рассматриваться как антоним к термину *пассивная стратегия*, которая предполагает постоянное сохранение той позиции по выбранному активу, которая была определена на этапе предварительного (может быть, достаточно серьезного и сложного) анализа актива и рыночной ситуации в целом.

Опишем модель принятия решений инвестором на фондовом рынке. Выходя на организованный рынок, самостоятельно или через профессиональных посредников, участники рынка (инвесторы) заключают между собой сделки, параметрами которых являются: вид финансового инструмента, время заключения t , цена p_t и объем q_t , выраженный в рублях, иных денежных единицах или стандартных биржевых лотах.

Подход большинства математических прогнозирующих моделей основан на анализе динамики изменения цен финансовых инструментов за прошедшие периоды времени, представленной в форме дискретного временного ряда, полученного в результате операции группировки (дискретизации) непрерывного потока сделок. Процедура группировки сделок позволяет сформировать временной ряд из исходного потока событий. Для расчета последовательных изменений цены финансового актива $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$ наиболее часто используют цену последней сделки, реже – средневзвешенную цену.

Принимая величину $p = p_t$, ($t = 0, 1, 2, \dots$) одновременно за цену покупки и продажи ценной бумаги в момент времени t , мы предполагаем, что рынок является абсолютно ликвидным, т.е. в определенные моменты времени (через равные интервалы) мы можем как купить, так и продать любое количество ценных бумаг (даже нецелое количество) по одной и той же цене. Таким образом, мы пренебрегаем транзакционными издержками и собственным влиянием на рынок.

В интервале времени с момента t до момента $t+1$ мы считаем, что сделки не заключаются, но цена за это время изменяется на величину Δp_t .

Инвестиционное решение, принимаемое в каждый момент времени $t=0, 1, 2, \dots$, состоит в определении двух параметров:

1. Направление сделки: $s_t \in \{1; -1; 0\}$. Значения параметра соответствуют купле (1), продаже (-1) или отказу от сделки (0) соответственно.
2. Объем сделки v_t (количество единиц).

В результате инвестиционного решения в момент t определяется позиция M_t по интересующей нас ценной бумаге, которая сохраняется до следующего инвестиционного решения:

$$M_t = \sum_{k=0}^n s_k v_k, \quad (1)$$

где M_t – количество ценных бумаг определенного вида, имеющееся в собственности инвестора на момент времени t .

Если p_t – рыночная (текущая) цена ценной бумаги в момент времени t , то умножив количество на цену, мы получим стоимостную оценку открытой позиции M_t :

$$S_t = p_t M_t. \quad (2)$$

Понятие позиций как совокупности принятых решений за всю историю торгов широко используется управляющими, реализующими активные инвестиционные стратегии. В финансовой среде сложилась следующая терминология:

1. Длинной позицией (long position) называют ситуацию, когда на счете инвестора находится положительное количество ценных бумаг: $M_t > 0$.
2. Короткой позицией (short position, short sale) называют обратную ситуацию: $M_t < 0$. Возможность открытия короткой позиции существует не всегда. Например, при торговле акциями открытие короткой позиции означает продажу ценных бумаг, не являющихся собственностью инвестора, а взятых в долг, например, у брокера. Такие возможности предоставляют не все посредники. При работе же с фьючерсными контрактами инвестор одинаково просто может открывать как длинную, так и короткую позицию.
3. Нулевой позицией (null position) называют случай $M_t = 0$. На счете у инвестора находится ноль ценных бумаг (заключенных контрактов), следовательно, он лишен возможности приращения стоимости инвестированного капитала.
4. Увеличением (усилением) позиции называется случай, когда в результате совершаемых сделок общая позиция инвестора увеличивается по абсолютной величине: $|M_{t+1}| > |M_t|$.
5. Уменьшением (ослаблением) позиции называется обратная ситуация: $|M_{t+1}| < |M_t|$.

После определения позиции M_t по ценной бумаге в момент времени t и оценки ее текущей стоимости S_t инвестор удерживает позицию до следующей возможности ее пересмотра (принятия инвестиционного решения). При этом оценка позиции изменяется на величину

$$\Delta S_t = (p_{t+1} - p_t) M_t. \quad (3)$$

Позицию удобно определять, различая характеристики ее абсолютной величины и направления:

$$M_t = s_t m_t, \quad (4)$$

где m_t – абсолютная величина позиции по бумаге ($m_t \geq 0$), отражающая степень доверия прогнозу, а значения s_t интерпретируются как сигналы на формирование позиции, прогноз движения цен.

Таким образом, в каждый момент времени t мы имеем открытую позицию M_t , характеризующуюся величиной m_t , направлением s_t и стоимостью S_t . Также, зная свободный остаток денежных средств (не инвестированной части капитала) D_t , мы можем определить совокупную оценку лимита торговой стратегии:

$$L_t = S_t + D_t, \quad (5)$$

которая изменяется во времени в зависимости от принимаемых инвестиционных решений.

Принятие решения, изменение позиции означает изменение структуры распределения капитала между денежной и инвестированной его частью. При этом мы имеем величины M_t , S_t , D_t и L_t до принятия решения и величины M_t^* , S_t^* , D_t^* и L_t^* – после него. Необходимо, чтобы $L_t^* = L_t$. Последнее соотношение отвечает закону сохранения капитала, который по предположению не изымается из оборота и не добавляется извне.

Можно выделить следующие показатели эффективности принимаемых решений и сформированной активной инвестиционной стратегии:

1. Абсолютная величина прибыли стратегии на интервале $[t, t+1]$:

$$\begin{aligned} \Delta L_t &= L_{t+1} - L_t^* = (S_{t+1} + D_{t+1}) - (S_t^* + D_t^*) = \\ &= (S_{t+1} + D_t^*) - (S_t^* + D_t^*) = S_{t+1} - S_t^* = \Delta S_t. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Относительная величина прибыли (доходность) на интервале $[t, t+1]$:

$$r_t = \frac{\Delta L_t}{L_t}. \quad (7)$$

3. Абсолютная прибыль с начала управления:

$$\Delta L = L_t - L_0. \quad (8)$$

4. Доходность с начала управления:

$$r = \frac{L_t - L_0}{L_0}, \text{ или в процентах годовых: } \rho = \frac{L_t - L_0}{L_0} \cdot \frac{365}{t} \cdot 100\%, \quad (9)$$

при условии, что t измеряется в днях.

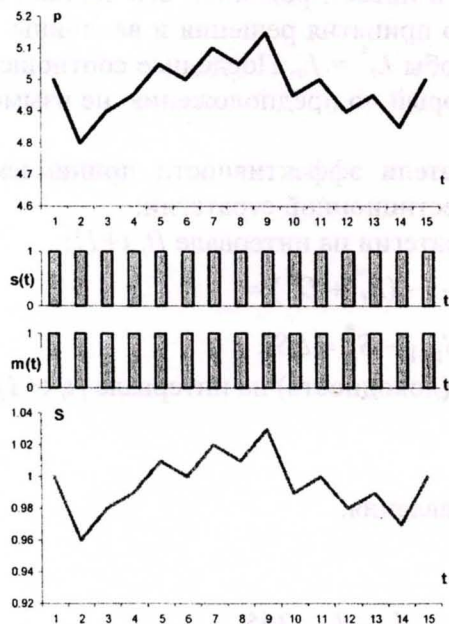
На рис. 1 приведены результаты моделирования управления капиталом для двух случаев: прямое однократное инвестирование капитала (пассивная стратегия) и передача капитала в активное управление (активная стратегия, базирующаяся на прогнозной модели технического анализа «индекс относительной силы, RSI» [6]).

При пассивном управлении инвестиционное решение принимается однажды, в начальный момент времени $t = 0$. Решение заключается в использовании всего капитала на приобретение ценных бумаг, т.е. открытие длинной позиции на полную величину лимита и в дальнейшем такая позиция сохраняется. Характер изменения лимита в этом случае совпадает с характером изменения цены на бумагу, относительные приращения и доходности оказываются равными:

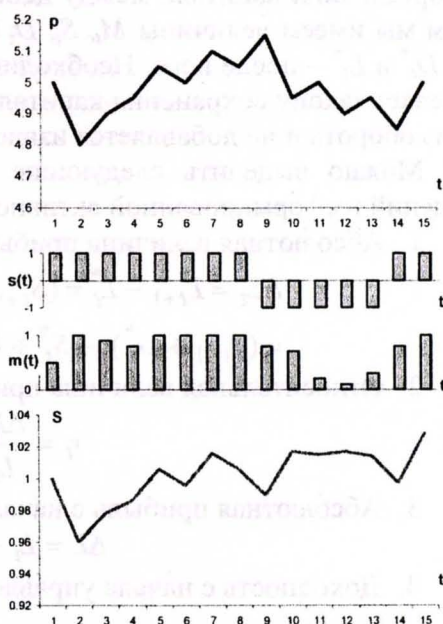
$$R_t^{\text{системы}} = s_t m_t \left(\frac{P_{t+1}^{\text{бумаги}}}{P_t^{\text{бумаги}}} - 1 \right) = s_t m_t \cdot R_t^{\text{бумаги}}; \quad (10)$$

$$R_t^{\text{системы}} = R_t^{\text{бумаги}} \Leftrightarrow s_t m_t \equiv 1.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 1,а.



а



б

Рис. 1. Стратегии управления капиталом: а – пассивная; б – активная

При использовании активной стратегии параметр s_t , определяемый системой RSI, задает прогноз движения цены на один период и принимает значения -1 (цена упадет), 1 (цена вырастет) или 0 (цена не изменится). Значение m_t задает степень доверия прогнозу s_t . Если $0 < m_t < 1$, то это означает, что мы ограниченно (не в полной мере) доверяем прогнозу и открываем позицию лишь на часть предоставленного капитала. Если $m_t = 1$, мы на 100 % верим прогнозу и открываем позицию на все средства. Таким образом, используя активную стратегию управления, мы постоянно пересматриваем открытые позиции и получаем другую динамику изменения во времени инвестированного капитала (рис. 1,б).

Иные виды активных стратегий будут рассмотрены далее в разделе 3.

2. Синтезированные финансовые инструменты

Применение активных стратегий управления финансовыми активами позволяет изменять характеристики приращения инвестированного капитала во времени. Рассматривая совместно фондовый актив определенного вида и конкретную активную стратегию управления вложениями в этот актив, мы получаем фактически новый финансовый инструмент. Как и обычный инструмент фондового рынка, он обладает статистическими характеристиками риска и доходности, которые могут быть рассчитаны по стандартным методикам. Объединяя различные активные стратегии (прогнозные модели) и различные реальные фондовые активы, мы получаем новый класс финансовых инструментов, который расширяет множество имеющихся на фондовом рынке инструментов. Искусственно построенные описанным выше образом финансовые инструменты будем далее называть *синтезированными*.

Таким образом, *синтезированный финансовый инструмент* представляет собой совокупность активной инвестиционной стратегии управления капиталом, основанной на прогнозной модели, и ценной бумаги, в отношении которой осуществляется принятие инвестиционных решений в соответствии с выбранной стратегией.

Логическая схема синтезированного инструмента представлена на рис. 2.

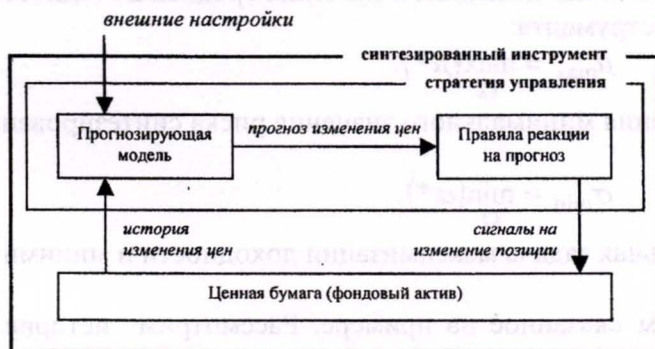


Рис.2. Логическая схема синтезированного финансового инструмента

Синтезированный инструмент, так же как и все фондовые ценности, обладает свойством перенесения стоимости во времени и прироста капитала, а значит, на равных правах с любой ценной бумагой может быть выбран в качестве объекта для инвестирования.

Поскольку качество прогноза модели в большинстве случаев зависит от ее настройки по входным (историческим) данным, характеристики синтезированного инструмента могут изменяться в зависимости от выбранной настройки. Инструмент, основанный на модели, дающей более точные прогнозы, будет демонстрировать лучшие качества.

Доходность синтезированного финансового инструмента, так же как и доходность ценной бумаги, может трактоваться как случайная величина в ма-

тематическом смысле этого термина. Изменяя настройки прогнозной модели, лежащей в основе синтезированного инструмента, мы управляем характеристиками этой случайной величины.

Для того чтобы количественно оценить качество синтезированного финансового инструмента, примем, следуя стандартной методике и выделив некоторый контрольный период T , содержащий m интервалов принятия решений, следующие стандартные показатели:

- 1) **доходность** – оценка математического ожидания относительных изменений лимита L_T за m базовых периодов T :

$$\mu^* = M(r_T) = \frac{1}{m} \sum_m \frac{\Delta L_T}{L_T}. \quad (11)$$

- 2) **риск** – оценка среднеквадратичного отклонения относительных изменений лимита за m базовых периодов T :

$$\sigma^* = M(r_T - M(r_T)). \quad (12)$$

В случае использования модели с настроенными параметрами показатели доходности и риска изменяются с изменением параметров. Обозначив через Ω множество значений настроечных параметров прогнозирующей модели (которые могут быть действительными, целыми числами или логическими переменными), можно сформулировать несколько задач оптимизации:

1. Задача нахождения максимального значения средней доходности синтезированного инструмента:

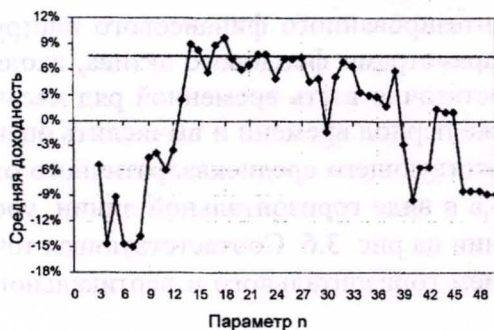
$$\mu_{\max} = \max_{\Omega}(\mu^*). \quad (13)$$

2. Задача нахождения минимального значения риска синтезированного инструмента:

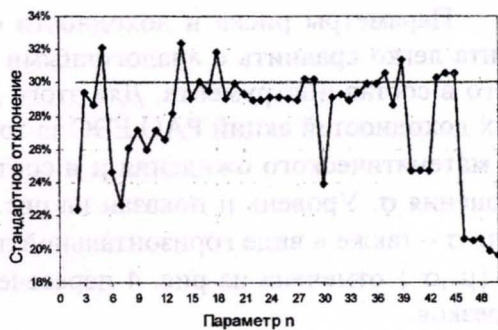
$$\sigma_{\min} = \min_{\Omega}(\sigma^*). \quad (14)$$

3. Двухкритериальная задача максимизации доходности и минимизации риска.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Рассмотрим историю торгов обыкновенными акциями ПАО ЕЭС на ММВБ за период с 01.01.1999 по 01.01.2001 гг. Выберем интервал принятия решений равный 1 дню. В качестве цены для расчета выберем цену закрытия (последней сделки) торгового дня. Для построения синтезированного инструмента сформируем стратегию, основанную на применении технического индикатора $RSI(n)$. В качестве базового периода для расчета приращений лимита инструмента возьмем 1 месяц (21 рабочий день). Проанализируем зависимость показателя μ^* , а также σ^* от параметра n (окно расчета индикатора RSI). График этих зависимостей представлен на рис. 3.



а



б

Рис. 3. Зависимость показателей от параметра n синтезированного инструмента, основанного на стратегии RSI(n): а – доходности; б – риска

Задачи одномерной оптимизации заключаются в поиске значений n , при которых математическое ожидание доходности принимает наибольшее значение ($n = 18$ на рис. 3,а), либо ее среднее квадратичное отклонение становится наименьшим ($n = 50$ на рис. 3,б).

Оптимальные по Парето решения задачи двухкритериальной оптимизации выделены на рис. 4 темными точками из всего множества вариантов.

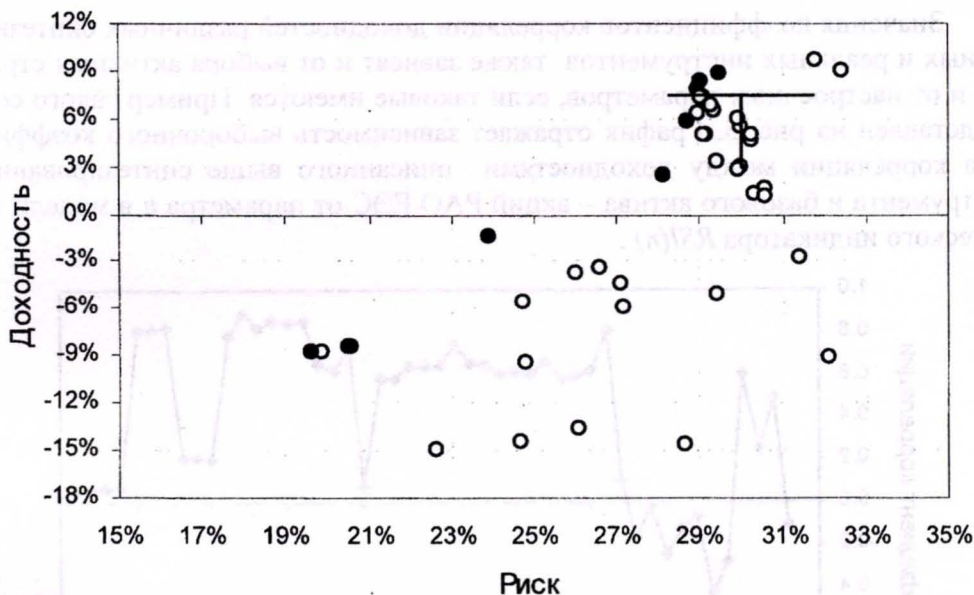


Рис.4. Парето оптимальные решения и множество комбинаций "риск-доходность" синтезированного финансового инструмента, основанного на стратегии RSI(n)

Параметры риска и доходности синтезированного финансового инструмента легко сравнить с аналогичными параметрами фондового актива, входящего в состав инструмента. Для этого достаточно взять временной ряд месячных доходностей акций РАО ЕЭС за тот же период времени и вычислить оценки математического ожидания μ и соответствующего среднеквадратичного отклонения σ . Уровень μ показан на рис. 3,а в виде горизонтальной линии, уровень σ – также в виде горизонтальной линии на рис. 3.б. Соответствующая точка $\{\mu, \sigma\}$ отмечена на рис. 4 пересечением горизонтального и вертикального отрезков.

Мы видим, что значения доходности и риска в некоторых случаях (при некоторых значениях параметра n) оказываются хуже аналогичных значений исходной ценной бумаги. В этих случаях использование синтезированного финансового инструмента не дает преимуществ, и выбор его в качестве объекта инвестирования не представляется рациональным. Последнее не противоречит предлагаемой концепции, поскольку прогнозная модель содержит параметры, подлежащие предварительной настройке.

Как правило, количество настроечных параметров инструмента достаточно велико, поэтому для оптимизации следует использовать численные методы (методы направленного поиска, случайного поиска, генетических алгоритмов и др.).

Значения коэффициентов корреляции доходностей различных синтезированных и реальных инструментов также зависят и от выбора активных стратегий и от настроечных параметров, если таковые имеются. Пример такого сорта представлен на рис. 5. График отражает зависимость выборочного коэффициента корреляции между доходностями описанного выше синтезированного инструмента и базового актива – акций РАО ЕЭС от параметра n в модели технического индикатора $RSI(n)$.

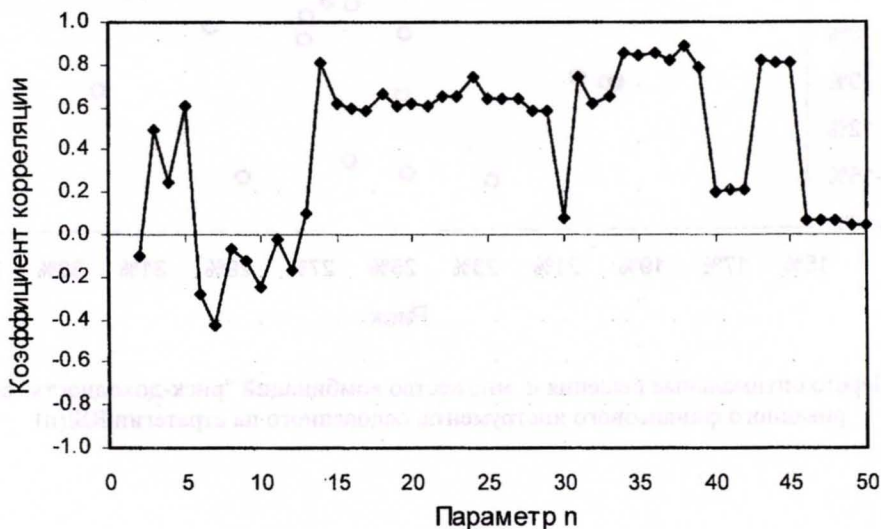


Рис. 5. Зависимость коэффициента корреляции от параметра n в модели $RSI(n)$

Основной результат настоящего параграфа состоит в следующем. Включение в портфель синтезированных финансовых инструментов расширяет возможности инвестора, позволяет изменять статистические характеристики как отдельных составляющих портфеля, так и корреляционные зависимости между ними. Это представляется весьма важным, так как именно перечисленные элементы играют ключевую роль в формировании эффективного портфеля.

3. Повышение эффективности инвестиционного портфеля

В данном параграфе мы рассмотрим синтезированные финансовые инструменты (СФИ) как составляющие инвестиционного портфеля. Как отмечалось выше, применение СФИ значительно увеличивает количество фондовых активов, которые могут находиться в портфеле инвестора, а управление характеристиками путем выбора подходящей прогнозной модели и изменения настроечных параметров позволяет сформулировать и в ряде случаев решить задачу оптимизации структуры портфеля.

Эффективную структуру портфеля, включающего некоторый набор реальных, обращающихся на рынке ценных бумаг и каким-либо образом построенное семейство основанных на них синтезированных инструментов, мы можем найти, применив модели Марковица и Тобина [2-3]. Напомним, что результатом в модели Марковица является множество эффективных или недоминируемых портфелей. Содержательно эффективность понимается в том смысле, что такие портфели нельзя улучшить (перераспределив капитал) одновременно по двум критериям: доходность (математическое ожидание доходности портфеля как случайной величины) и риск (соответствующее среднеквадратичное отклонение). В модели Марковица участвуют только рискованные активы, а модель Тобина предполагает возможность безрисковых вложений. Соответственно, при некоторых технических допущениях, геометрически на плоскости риск-доходность решению первой задачи отвечает ветвь гиперболы, а второй – часть прямой (луч).

Одно из свойств решений указанных задач состоит в том, что добавление в число составляющих портфеля дополнительных инструментов не может ухудшить характеристики эффективных портфелей. Если же добавляемые инструменты обладают в определенном смысле лучшими характеристиками, чем исходные элементы, то результат заведомо улучшается. Из сказанного следует важный для нас вывод: включение в портфель СФИ наряду с ценными бумагами, лежащими в их основе, не может ухудшить результат в смысле теории Марковица – Тобина, а при подходящем выборе СФИ – улучшает его.

Рамки настоящей работы не позволяют подробно описать соответствующие математические построения. Ниже на простом примере мы проиллюстрируем, как меняется эффективность вложений, если к одной реальной ценной бумаге добавить СФИ, построенный на ее основе.

Вновь обратимся к примеру с акциями ПАО ЕЭС и стратегией, основанной на применении технического индикатора RSI. Сформируем простейший портфель, состоящий из двух активов: акции ПАО ЕЭС и синтетического фи-

нансового инструмента, использующего модель $RSI(n)$. Решая задачу Марковица, будем находить множество недоминируемых портфелей двух перечисленных активов для различных значений n индикатора RSI . Получим несколько линий оптимальных портфелей (рис. 6).

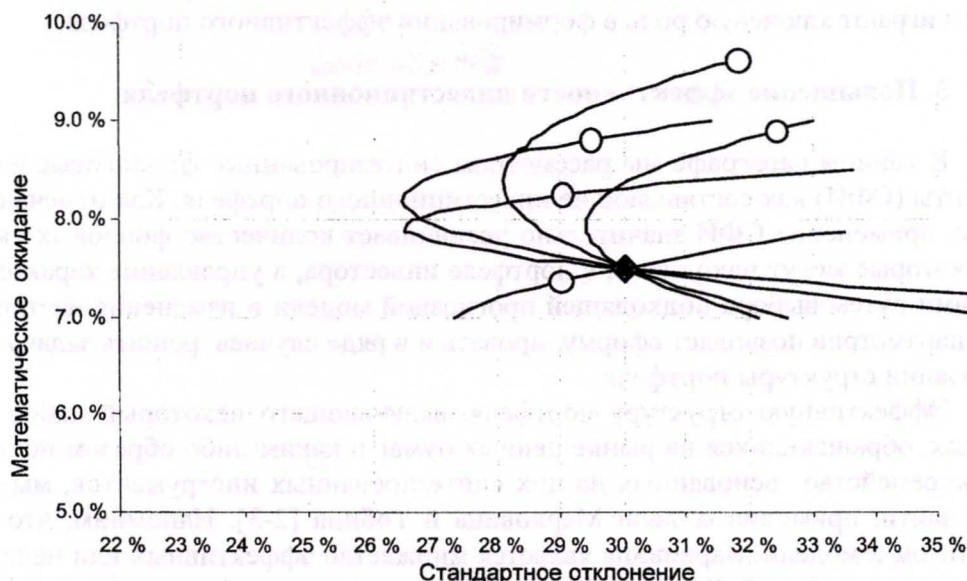


Рис. 6. Множество линий эффективных портфелей акции РАО ЕЭС и СФИ $RSI(n)$

Эффективным портфелям соответствуют «верхние» части изображенных кривых, синтезированным инструментам — отмеченные кружками точки, параметрам самой акции — ромб. В четырех из изображенных пяти случаев новый портфель может быть составлен таким образом, что его характеристики будут строго лучше, чем у исходной бумаги. В последнем, пятом, варианте мы можем уменьшить риск, уменьшая при этом доходность, и, наоборот, увеличить доходность одновременно с риском. Впрочем, можно вложить все средства в исходную бумагу, сохранив у портфеля ее свойства.

Для того чтобы сравнивать множества эффективных портфелей между собой и определить наилучшее в некотором смысле множество, удобнее использовать модель Тобина. Выбрав некоторое значение доходности безрискового финансового инструмента μ_0 , определим угол наклона γ линии эффективных портфелей задачи Тобина (CML) к оси абсцисс.

Введем отношение предпочтения: для одного и того же значения μ_0 множество эффективных портфелей A предпочтительнее множества портфелей B тогда и только тогда, когда $\tan \gamma^A > \tan \gamma^B$.

Это отношение отражает стремление инвестора уменьшить риск при заданном уровне доходности либо увеличить доходность инвестированного капитала при фиксированном уровне риска в условиях существования на рынке безрисковой ставки. Инвестор предпочтет ту линию CML, которая обеспечивает большую премию за риск (рис. 7).

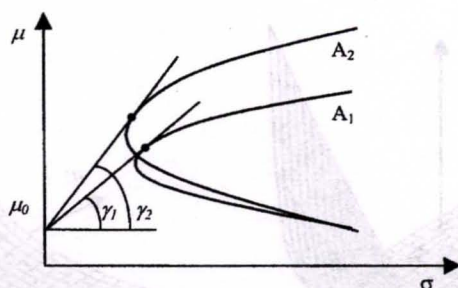


Рис. 7. Критерий сравнения множеств оптимальных портфелей

Значение $\operatorname{tg} \gamma$ может быть найдено в общем случае произвольного количества бумаг как решение задачи оптимизации

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x^T m - \mu_0}{\sqrt{x^T V x}} \rightarrow \max_x \quad (15)$$

$$x^T e = 1$$

В литературе показатель (15) называется *коэффициентом Шарпа* (Sharpe's ratio), который используется в качестве критерия эффективности инвестиционных стратегий с учетом риска.

Для описанной выше ситуации с двумя активами – акцией РАО ЕЭС и соответствующим СФИ – коэффициент Шарпа зависит от параметров ценной бумаги $\{\mu_1, \sigma_1\}$, синтезированного финансового инструмента $\{\mu_2, \sigma_2\}$ и коэффициента корреляции R_{12} . При этом, показатели μ_2, σ_2 зависят от настроечных переменных ω : $\mu_2(\omega)$, $\sigma_2(\omega)$ и $R_{12}(\omega)$. Задача нахождения максимума $\operatorname{tg} \gamma$ с учетом (15) может быть выражена следующим образом:

$$(\operatorname{tg} \gamma)_{\max} = \max_{\omega} \left(\frac{\sigma_1^2 (\mu_0 - \mu_2(\omega))^2 + \sigma_2(\omega)^2 (\mu_0 - \mu_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_2(\omega)R_{12}(\omega)(\mu_0 - \mu_1)(\mu_0 - \mu_2(\omega))}{\sigma_1^2\sigma_2(\omega)^2(1 - R_{12}(\omega)^2)} \right) \quad (16)$$

На приведенных ниже графиках (рис. 8-9) проиллюстрирован характер изменения значения $\operatorname{tg} \gamma$ в зависимости от параметров задачи для случаев, когда варьируются два параметра.

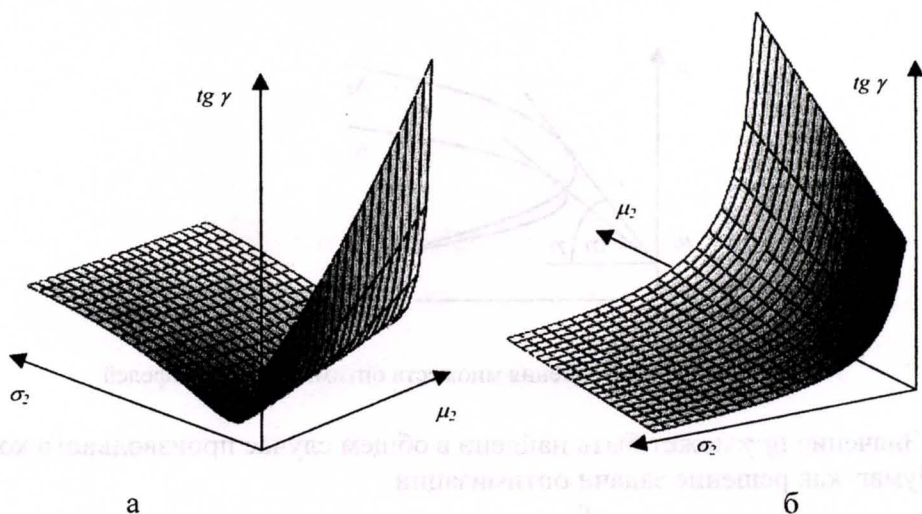


Рис. 8. Зависимость $\operatorname{tg} \gamma$ от доходности μ_2 и риска σ_2 :
а – при $R_{12} > 0$; б – при $R_{12} < 0$

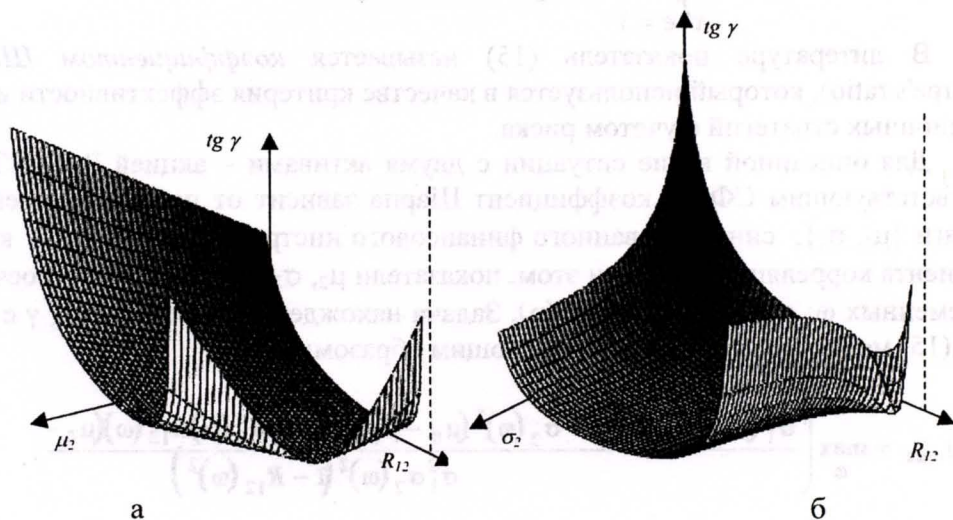


Рис. 9. Зависимость $\operatorname{tg} \gamma$ от: а – корреляции R_{12} и доходности μ_2 ;
б – корреляции R_{12} и риска σ_2

В случае модели RSI(n) оптимизация может быть осуществлена простым перебором конечного числа значений параметра n . В общем случае требуется применение более сложных, как правило, численных, методов.

Так, для более диверсифицированного портфеля ($N > 2$) с множеством СФИ, входящих в его состав, задача (16) получается сложнее, в частности, из-за характера корреляционных связей между активами. Активное управление i -й составляющей портфеля приводит к изменению всех элементов σ_{ij} ($j \neq i$) ковариационной матрицы. Обозначая снова множество значений настроечных параметров всех систем через Ω , и используя аналог задачи (16) можно сформулировать задачу нахождения максимума $\operatorname{tg} \gamma$ у следующим образом:

$$(tg\gamma)_{\max} = \max_{x, \omega} \left(\frac{x^T m(\omega) - \mu_0}{\sqrt{x^T V(\omega) x}} \right), \quad (17)$$
$$x^T e = 1, \omega \in \Omega.$$

где $\omega \in \Omega$ в общем случае – и размерность задачи существенно повышается. Поиск экстремума сопряжен со значительными вычислительными трудностями. В практических целях более удобно использовать алгоритм, решающий серию более простых задач, оптимизирующий последовательно пары, состоящие из фондового актива и соответствующего СФИ.

Приведем результаты вычислительных экспериментов, относящихся к оптимизации эффективного портфеля, состоящего из реальных фондовых активов российского фондового рынка и построенных на их основе СФИ. На основе анализа биржевых объемов торгов был выбран перечень из десяти наиболее ликвидных ценных бумаг, обращающихся на ММВБ, МФБ и Фондовой бирже РТС. Выделены два однородных интервала данных: с 01.01.1999 по 01.01.2001 и с 01.01.2001 по 14.04.2002. Первый интервал использовался для оптимизации систем и формирования портфеля, второй, более поздний, – для верификации прогнозов. Для построения портфеля выбран срок инвестирования равный 1 месяцу, и безрисковая ставка на 1 месяц равная 1,2 % (14,4 % годовых, что соответствовало текущему уровню месячных ставок по ГКО-ОФЗ).

Сформированные синтезированные финансовые инструменты использовали следующие аналитические технологии [6-9]:

- 1). Технический индикатор RSI (индекс относительной силы) с настройками параметрами n (окно расчета), I_{up} (верхняя сигнальная линия), I_{down} (нижняя сигнальная линия) в пакете Equis MetaStock 7.0.
- 2). Технический индикатор MACD (конвергенция-дивергенция скользящих средних) с параметрами n_1, n_2, n_3 – окна скользящих средних в пакете Equis MetaStock 7.0.
- 3). Модель ARIMA (авторегрессии и проинтегрированного скользящих средних, Бокс и Дженкинс) – пакет Statistica 5.5.
- 4). Модель нейронной сети, перцептрон с динамическим добавлением скрытых нейронов – пакет NeuroShell Predictor 2.0.

Для указанных моделей построены СФИ для каждой выбранной ценной бумаги и численно решены задачи оптимизации коэффициента Шарпа, составленные из пар "ценная бумага – СФИ", построены множества эффективных, в смысле Марковица-Тобина, портфелей.

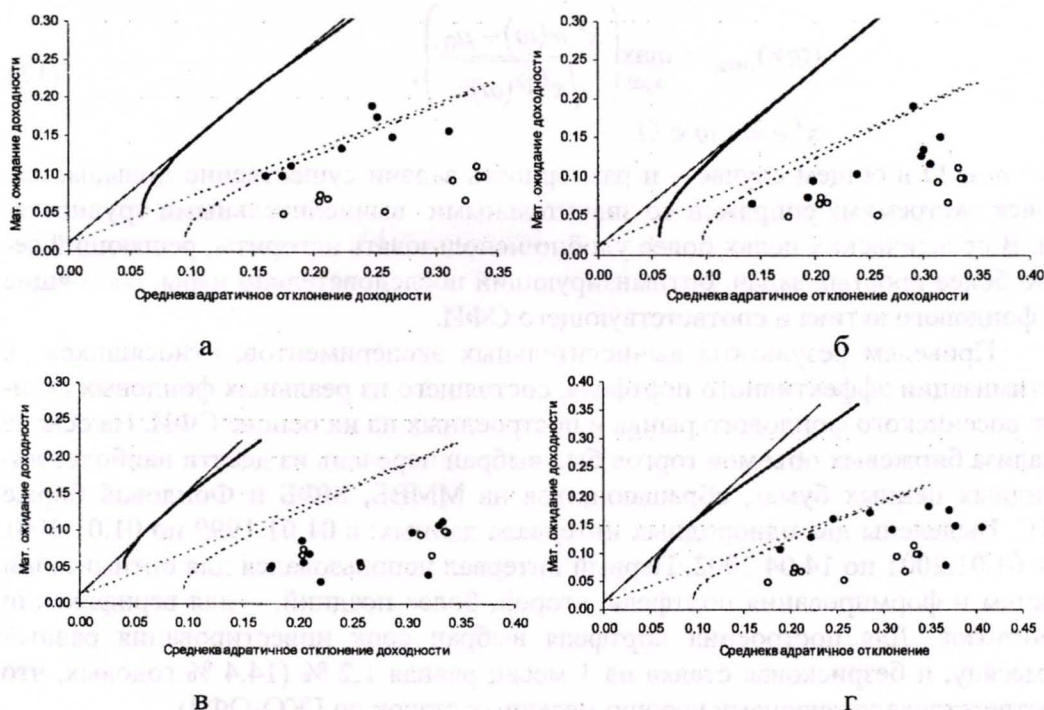


Рис. 10. Эффективные портфели ценных бумаг и СФИ: а – MACD, б – RSI, в – ARIMA, г – нейросеть

На рис. 10 пунктиром представлена кривая множества эффективных портфелей и линия CML для классической задачи оптимизации портфеля, состоящего из набора ценных бумаг. Светлые точки обозначают параметры доходности и риска ценных бумаг, темные – соответствующих синтезированных инструментов.

Модель проверена на более позднем интервале данных, для чего зафиксированы точки, принадлежащие линиям оптимальных портфелей со значением среднеквадратичного отклонения, равным 0,15. Прогнозные значения и результаты верификации представлены в таблице

Прогнозные и фактические значения портфелей

Стратегия	Показатель	Прогнозное значение	Фактическое значение	Отклонение (факт – прогноз)
Пассивная	Кэфф. Шарпа	0.61		
	Мат. ожидание	0.089	0.119	0.030
	Среднекв. отклонение	0.150	0.132	-0.018
RSI	Кэфф. Шарпа	1.14		
	Мат. ожидание	0.180	0.030	-0.150
	Среднекв. отклонение	0.150	0.181	0.031
MACD	Кэфф. Шарпа	1.30		
	Мат. ожидание	0.206	0.181	-0.025
	Среднекв. отклонение	0.150	0.161	0.011

Окончание таблицы

ARIMA	Коэфф. Шарпа	1.41		
	Мат. ожидание	0.205	0.102	-0.103
	Среднекв. отклонение	0.150	0.203	0.053
Нейросеть	Коэфф. Шарпа	1.50		
	Мат. ожидание	0.222	0.201	-0.021
	Среднекв. отклонение	0.150	0.161	0.011

На основании полученных результатов сделаны следующие выводы:

Модель формирования портфеля СФИ позволяет повысить эффективность управления капиталом даже на основе простейших методов анализа, доступных отечественным инвесторам. Включение синтезированных финансовых инструментов позволяет улучшить множество эффективных портфелей и повысить доходность инвестиций при фиксированном уровне риска. В частности, наблюдалось увеличение коэффициента Шарпа портфеля в 1,9 – 2,5 раза. Сравнительный анализ имеющегося инструментария свидетельствует, в частности, о более значимых результатах управления при применении методологии нейросетей и меньшей эффективности использования методов технического анализа.

Литература

1. Bachelier L. Theorie de la Speculation // Ann. De l'Ecole norm. super. 1900
2. Markowitz H. Portfolio selection // J. Finance. 1952. Vol.7. P.77-91.
3. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Economic Stud. 1958.
4. Mossin J. Optimal multiperiod portfolio policies, J. Bus. 41, 1969.
5. Merton R.C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. Rev. Econ. Stat. 51, 1969.
6. Мерфи Джон Дж. Технический анализ фьючерсных рынков: теория и практика. М.: Сокол, 1996.
7. Де Марк Т. Технический анализ – новая наука. – М.:Перспектива, 2000. 153 с.
8. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептрон и теория механизмов мозга / М.: Мир, 1965.
9. Hopfield J.J. Neural networks and phisical systems with emergent collective computational abilities // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1982.
10. Nikonov O.I. Financial decisions via methods of guaranteed control theory // Pliska : Stud. Math. Bulgar. 1998.
11. Nikonov O.I., On a set-valued dynamic model of investment portfolio reconstruction // Modeling and Control of Economic Systems - SME 2001: Preprints IFAC. Klagenfurt, 2001. C.165-167.