О. И. Никонов, д-р физ.-мат. наук, проф.
М.А. Медведев
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, Екатеринбург

ДИВЕРСИФИКАЦИЯ РИСКОВ ПРЕДПРИЯТИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ВНЕШНИМИ КОНТРАГЕНТАМИ [1]

В работе рассматривается экономико-математическая модель взаимодействия предприятия с поставщиками сырья и покупателями готовой продукции. Предполагается, что предприятие работает с группой контрагентов, работа с которыми сопряжена с риском невыполнения ими своих обязательств. Приводится формализованная постановка и решение задачи о рациональном распределении заказа между поставщиками сырья и готовой продукции между потребителями.

Введение. Работа посвящена вопросам взаимодействия предприятия-производителя продукции с другими предприятиями, являющимися для него поставщиками сырья и потребителями готовой продукции.

Организация процесса поставок различных видов сырья обычно предполагает работу с рядом предприятий-поставщиков, специализирующихся на поставках одного или нескольких видов сырья. Названные предприятия-поставщики имеют, как правило, различные характеристики, определяющие для предприятия-производителя степень эффективности их использования в качестве своих контрагентов. Аналогично готовая продукция предприятия также распространяется, как правило, через предприятия оптовой или розничной торговли. При большом числе контрагентов правильная организация поставок, связанная с распределением объемов поставляемой продукции между контрагентами, также может существенно влиять на результаты деятельности предприятия-производителя.

Процесс рассматривается в условиях воздействия случайных возмущений, влияющих на регулярность и объем поставок сырья, которые, в свою очередь, могут привести к нарушениям производственного процесса и, как следствие, к убыткам. Подобная неопределенность присутствует и при организации сбыта готовой продукции. А именно надлежит корректно учитывать колебания доходностей отдельных операций по поставкам продукции. Названные колебания могут возникать в связи с различными обстоятельствами, например в связи с нерегулярностью выплат за поставленную продукцию. При этом нерегулярность может носить объективно случайный характер, определятся спросом на продукцию, колебаниями цен и иными причинами, влияющими на доходность операций случайным образом. В указанных случаях целесообразно применение экономико-математического инструментария, ориентированного на учет случайных возмущений и снижение риска потерь, вызванных случайными факторами.

В работе рассматриваются две в определенном смысле двойственные модели. Первая модель относится к задаче минимизации затрат на сырье и комплектующие для предприятия-производителя в условиях работы с группой предприятий-поставщиков, каждый из которых характеризуется функцией потерь, вызванных случайными факторами. Во втором случае речь идет о продаже предприятием готовой продукции. Предлагается модель, позволяющая рассчитывать рациональную, выгодную для предприятия-поставщика структуру

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-08034-офи-п и Российского гуманитарного научного фонда, проект 05-02-02118а.

поставок, обеспечивающую наибольшую доходность при минимизации формализованного должным образом риска операций. Используются подходы и методы финансовой математики, применяемые в теории портфельных инвестиций[2].

Частный случай описанной ситуации рассматривался в работе[2], где речь шла о взаимодействии предприятия-производителя с потребителями (покупателями) произведенной продукции. Модель апробирована на данных нескольких торгово-посреднических фирм. Результаты апробации показали эффективность развиваемого подхода.

Постановка задачи о выборе поставщиков сырья. Будем предполагать, что в процессе производства предприятие использует N видов сырья $s_1, s_2, \dots, s_N$.

Предполагается также, что предприятие работает с L поставщиками, которые постав от указанное сырье. Количество сырья s_i, которое в принципе может обеспечить пос щик с номером j, полагаем равным $\overline{x}_{ij}$ (если сырь анного поставщика нет, олагаем $\overline{x}_{ij} = 0$). Цена единицы сырья s_i оставщика j предполагается равной m_{ij}.

Считаем, что для обеспечения производства при фиксированных производственных мощностях необходимо в единицу времени иметь k_i единиц сырья s_i, $i = 1, \dots, N$.

Если все поставщики вовремя и в нужном объеме осуществляют запланированные поставки, то рациональный выбор поставщиков состоит в том, чтобы обеспечивать необходимое количество всех видов сырья при минимальных затратах. Для иллюстрации последующих построений целесообразно рассмотреть указанную задачу подробнее.

Рациональный выбор поставщиков: детерминированный вариант. Количество сырья s_i, которое пред приятие покупает у x_{ij} тавщика с номером j, об x_{ij} ачим через x_{ij}. Матрицу с элементами x_{ij} обозначим символом *X*. Эта матрица имеет размеры $[N \times L]$ и характеризует распределение заказов на сырье между поставщиками. Аналогично через M обозначи $[N \times L]$ -матрицу ц m_{ij} ченная на д

$$S(X) = \sum_{i,j} m_{ij} x_{ij} = Sp(X^T \mathrm{M}),$$

где суммирование осуществляется по всем $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, L$; $Sp(A)$ - след матрицы *A* (сумма диагональных элементов). Символ *T* здесь и далее означает операцию транспонирования.

Задача состоит в минимизации величины $S(X)$:

$$S(X) \to \min \tag{1}$$

при ограничениях

$$0 \le x_{ij} \le \overline{x}_{ij}; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{L} x_{ij} \ge k_i. \tag{3}$$

Задача (1)-(3) представляет собой стандартную задачу линейного программирования, методы решения которой хо шо известны. Заметим, что если сырье s_i отсутствует у п ка j, то в решении будем иметь $x_{ij} = 0$.

Соотношения (2) и (3) можно переписать в матричной форме

$$O \le X \le \overline{X};$$
$$Xe_L \ge K,$$

где e_L — вектор-столбец размерности *L*, элементами которого являются одни единицы; *O* — матрица, состоящая из нулей, $\overline{X}$ — матрица средних значений $\overline{x}_{ij}$ и *K* — вектор ограничений на необ димое количество сырья с элементами k_i. Матричные неравенства понимаются поэлементно.

Учет риска несвоевременных поставок сырья в нужном объеме. В настоящем разделе мы модифицируем модель

[2] Markowitz, H. Portfolio selection / H.Markowitz // J. Finance. 1952. Vol.7. P.77-91.

таким образом, чтобы учесть риски нарушения поставщиками своих обязательств. Названные риски могут иметь объективный характер и быть связанными с изменениями макроэкономической ситуации, с нарушениями обязательств компаний, осуществляющих доставку сырья и др. Мы будем далее предполагать, что риски носят случайный характер и характеризуются случайной величиной ущерба, который наносится производству несвоевременной или не полной поставкой необходимого сырья. При этом в рассматриваемой ситуации естественно предполагать, что величина ущерба пропорциональна необходимому (заказанному) количеству сырья. Формализуем сказанное следующим образом.

Полагая, x_{ij} предприятию-п авщику j заказано x_{ij} единиц сырья s $m_{ij}x_{ij}$ дем предполагать, что к затратам $m_{ij}x_{ij}$ на оплату $\lambda_{ij}x_{ij}$ анного λ овара добавляется сумма $\lambda_{ij}x_{ij}$, где λ_{ij} — случайная величина, характеризующая возможность (вероятность) невыполнени λ оставщиком своих обязательств. Если λ_{ij} принимает значение, равное нулю – поставки осуществляются своевременно и в полном объе λ_{ij} при других (положительных) значениях λ_{ij} — имеем дополнительные затраты, связанные с невыполнением контрагентом своих обязательств.

Таким образом, модифицированная функция затрат становится случайной величиной

$$\Psi(X,\Lambda) = S(X) + \sum_{i,j} \lambda_{ij} x_{ij}. \qquad (4)$$

Символом Λ в данном соотношении обозначена $[N \times L]$ — матрица, аналогичная матрице *X*, состоящая из элементов λ_{ij}.

Ожидаемая величина затрат определяется соотношением

$$E[\Psi(\Lambda,X)] = S(X) + \sum_{i,j} \overline{\lambda}_{ij} x_{ij},$$

где $\overline{\lambda}_{ij}$ — ожидаемое значение случайной величины λ_{ij}.

В качестве меры риска выберем среднеквадратичное отклонение случайной величины затрат от своего среднего (ожидаемого) значения: $\sigma(\Lambda,X) = \sqrt{D(\Psi(\Lambda,X)}$, где символом $D(\Psi(\Lambda,X))$ обозначена дисперсия случайной величины $\Psi(\Lambda,X)$.

Используя представление (4) для среднеквадратичного отклонения получим

$$\sigma^2(\Lambda,X) = E[(\sum_{i,j} x_{ij}(\lambda_{ij} - \overline{\lambda}_{ij}))^2] = \sum_{i,j,p,m} x_{ij} x_{pm} E[(\lambda_{ij} - \overline{\lambda}_{ij})(\lambda_{pm} - \overline{\lambda}_{pm})]. \qquad (5)$$

В последнем выражении суммирование осуществляется i, j, p, m в $i, p = 1,\dots,N$ и значениям индексов ; , $j, m = 1,\dots,L$.

Запи соотношение в матричнo атрицы

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{ij11} & \cdots & \sigma_{ij1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{ijN1} & \cdots & \sigma_{ijNL} \end{pmatrix},$$

элем ми которых являются ковариации σ_{ijpm} случайных величин λ_{ij} и λ_{pm}: $\sigma_{ijpm} = E[(\lambda_{ij} - \overline{\lambda}_{ij})(\lambda_{pm} - \overline{\lambda}_{pm})]$.

Для фиксированных значений i и j элементы матрицы A_{ij} характеризуют зависимость выполнения заказа i-го вида сырья у j-го поставщика от иных аналогичных заказов. Если такой зависимости нет и случайные величины независимы, то у матрицы A_{ij} отличен от нуля единственный элемент σ_{ijij}.

С учетом введенных обозначений соотношение (5) можно переписать в виде

$$\sigma^2(\Lambda,X) = e_N^T(\sum_{i,j} x_{ij} A_{ij} X^T) e_N.$$

Таким образом, приходим к следующей постановке задачи. Требуется минимизировать две величины:

$$\Phi(X) = S(X) + \sum_{i,j} \overline{\lambda}_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (6)$$

при линейных ограничениях

$$O \le X \le \overline{X}; \qquad (7)$$

$$Xe_L \ge K. \qquad (8)$$

Соотношения (6)-(9) представляют собой не что иное, как двухкритериальную линейно-квадратичную задачу математического программирования. При достаточно общих предположениях существуют оптимальные по Парето решения задачи, которые могут быть найдены известными методами.

Рациональный выбор покупателей готовой продукции. Будем предполагать, что предприятие производит (реализует) M видов готовой продукции $v_1, v_2, \dots, v_M$. Предполагается также, что предприятие работает с R потребителями, которые покупают реализуемую продукцию.

Будем предполагать также, что доходность операции по продаже продукции v_i предприятию с номером j есть случайная величина r_{ij} с заданными характеристиками. Случайность обусловлена тем, что при работе с каждым конкретным потребителем и видом продукции величина r_{ij} колеблется с течением времени. Как отмечалось во введении, в ряде ситуаций эти колебания носят объективно случайный характер, однако в целом поведение доходности отражает свойства продукции и предприятия-потребителя, характеризующие целесообразность его использования в качестве партнера. Заметим, что определение характеристик указанных случайных величин по реальным данным о деятельности предприятия – далеко не тривиальная задача. Ее исследование можно найти в упомянутой работе[3]. Матрицу размерности $[M \times R]$,составленную из случайных величин r_{ij} обозначим символом *P*.

Долю произведенной продукции (в денежном выражении) вида v_i. которую предприятие поставляет потребителю с номером *j,* обозначим символом y_{ij}. Ожидаемое значение совокупной доходности поставок продукции может быть представлено соотношением

$$V(P,Y) = Sp(Y^T E[P]). \quad (10)$$

[3] Никонов О.И. Повышение эффективности системы сбыта продукции: математическое моделирование / О .И. Никонов, М. А. Медведева, Д. С. Египцев // Вестн. УГТУ-УПИ. Сер. Экономика и упр. 2004. 4, вып.4. С. 96-103.

Символом *Y* в данном соотношении обозначена $[M \times R]$- матрица, состоящая из элементов y_{ij}, $j = 1, \dots, R$, ;

$E[P]$ — матрица, составленная из ожидаемых доходностей $m_{ij} = E[r_{ij}]$.

Риск в форме среднеквадратичного отклонения, связанный с осуществляемой операцией, определяется формулой, аналогичной соотношению (5):

$$s^2(P,Y) = E[(\sum_{i,j} y_{ij}(r_{ij} - m_{ij}))^2] = \sum_{i,j,p,m} y_{ij} y_{pm} E[(r_{ij} - m_{ij})(r_{pm} - m_{ij})\ ]$$

(11)

Последнее равенство можно переписать в век ме, вводя матрицы

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} \mathrm{r}_{ij11} & \cdots & \mathrm{r}_{ij1R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{r}_{ijM1} & \cdots & \mathrm{r}_{ijMR} \end{pmatrix},$$

элементами которых являются ковариации r_{ijpm} случайных величин r_{ij} и r_{pm}:

$$\mathrm{r}_{ijpm} = E[(r_{ij} - m_{ij})(r_{pm} - m_{pm})].$$

С учетом введенных обозначений соотношение (11) переписывается в виде

$$s^2(P,Y) = e_M^T(\sum_{i,j} y_{ij} B_{ij} Y^T) e_M.$$

Предполагая, что выбором матрицы *Y* следует максимизировать ожидаемую совокупную доходность операций и минимизировать риск, определяемый как среднеквадратичное отклонение, приходим к следующей постановке двухкритериальной задачи:

$$V(P,Y) = Sp(Y^T E[P]) \to \max; \quad (12)$$

$$s^2(P,Y) = e_M^T(\sum_{i,j} y_{ij} B_{ij} Y^T) e_M$$

при линейных ограничениях

$$Y \geq O; \quad (14)$$

$$e_M^T Y e_R^T = 1.$$

(15)

Сформулированной задаче можем сопоставить однопараметрическое семейство линейно-квадратичных однокритериальных оптимизационных задач:

$$e_M^T(\sum_{i,j} y_{ij} B_{ij} Y^T) e_M \to \min;$$

(16)

$$Sp(Y^T E[P]) = \mathrm{a}; \quad (17)$$

$$Y \geq O; \tag{18}$$

$$e_M^T Y e_R^T = 1. \tag{19}$$

Данная задача представляет собой не что иное, как записанную в подходящей форме задачу Г. Марковица, в которой требуется минимизировать риск портфеля при фиксированном уровне доходности, равном значению параметра. При достаточно общих предположениях задача имеет непустое множество оптимальных по Парето решений.

В заключение для иллюстрации приведенных построений рассмотрим упрощенный вариант задачи (16)-(19) в следующем частном случае. Предположим, что предприятие реализует товар лишь одного вида, т. е. *M*=1. Тогда случайная величина доходности определяется номером предприятия-покупателя и имеет вид $r_{1j} = r_j$ (первый индекс, равный единице, можно опустить), j = 1,…,*R*. Аналогично матрица *Y* в этом случае есть не что иное, как вектор-строка

$$s^2(P,Y) = E[(\sum_j y_j(r_j - m_j))^2] = \sum_{j,m} y_j y_m E[(r_j - m_j)(r_m - m_j)\ ] \quad 1)$$

приобретает вид

$$Y^T E[P] = \begin{pmatrix} y_1 m_1 & \cdots & y_1 m_R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_R m_1 & \cdots & y_R m_R \end{pmatrix}. \mathrm{r}_{jR}),$$

и $Sp(Y^T E[P]) = \sum_{j=1}^{R} y_j m_j$.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае приходим к постановке задачи, совпадающей с предложенной в

$$E(r) = \sum^{R} E[r_i] \cdot y_i \to \max$$

$$s\,(r) = (\sum_{i,j=1}^{N} y_i s_{ij} y_j)^{1/2} \to \min$$

при ограничениях $y_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{R} y_i = 1$.