

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

О.И. Никонов, д-р физ.-мат. наук, проф.,
М.А. Медведев, аспирант

Уральский государственный технический
университет – УПИ, г. Екатеринбург

СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ*

В статье рассматриваются некоторые приложения теории портфельных инвестиций, восходящей к работам Г. Марковица. Названная теория, развитая первоначально для портфелей рискованных финансовых инструментов (акций), может при должной модификации использоваться и при исследовании иных объектов. В настоящей работе анализируются несколько ситуаций, где такое применение оправдано и представляется перспективным. Рассматривается задача построения эффективного портфеля банковских продуктов, а также формирования эффективных портфелей контрактов и клиентов предприятия.

Введение

В настоящей работе теория портфельных инвестиций, восходящая к работе Г. Марковица¹ и развитая первоначально для рискованных финансовых инструментов рынка ценных бумаг, применяется к построению эффективных портфелей из объектов иной природы. Существо названной теории состоит в следующем. Предположим, что инвестор имеет возможность распределить свой капитал между N рискованными активами, доходность каждого из которых r_i может трактоваться как случайная величина в математическом смысле данного термина. Портфель ассоциируется с вектором

$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ долей капитала, которым располагает инвестор, $\sum_{i=1}^N y_i = 1$.

Доходность портфеля $r_y = \sum_{i=1}^N y_i r_i$ – также случайная величина, ее ожидаемое

значение (математическое ожидание)

$\mu = E[\sum_{i=1}^N y_i r_i]$ инвестору надлежит максимизировать. Риск портфеля определяется как среднеквадратичное (стандартное) отклонение случайной величины r_y ,

$\sigma = \sqrt{D[\sum_{i=1}^N y_i r_i]}$. После преобразований,

для ожидаемого значения доходности портфеля и риска получаем соот-

ветственно $\mu = x^T y$ и $\sigma^2(y) = y^T V y$, где

$x = (x_1, \dots, x_N)^T$ – вектор ожидаемых доходностей отдельных активов, V – матрица ковариаций. Классическая постановка задачи Марковица в простейшей форме имеет вид

$$y^T V y \rightarrow \min_y;$$

$$e^T y = 1;$$

$$x^T y = \mu.$$

В последнем равенстве μ – параметр, множеству всевозможных значе-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00483а и Российского гуманитарного научного фонда, проект № 08-02-00315а.

¹ Markowitz H. Portfolio selection // J. Finance. 1952. Vol.7. P.77-91.

ний параметра соответствует кривая, описываемая в данной простейшей постановке явным уравнением. Часть этой кривой отвечает так называемым эффективным или неуплучшаемым портфелям, для которых не существует иных портфелей более предпочтительных в смысле критериев риска и доходности. Явным образом находятся и сами портфели. При дополнительных ограничениях на доли вложений, например, в виде неравенств $y_i^{\min} \leq y_i \leq y_i^{\max}$ эффективные (по иному оптимальные) по Парето портфели находятся с помощью численных процедур.

Со времени появления первой работы Г. Марковица, развитие теории портфельных инвестиций шло в нескольких направлениях. Первое направление связано с работой Дж. Тобина² и развитием модели ценообразования на рынке капитала (Capital Asset Pricing Model). Другое направление – динамические постановки задачи. Здесь отметим работы Р. Мертона³ и Дж. Моссина⁴, относящиеся соответственно к моделированию непрерывных и многошаговых стохастических процессов. Направление, соответствующее тематике настоящей работы, соответствует применению портфельной теории к объектам, отличным по своей природе от ценных бумаг. Здесь нельзя не упомянуть работы, относящиеся к аренде нефтяных производств⁵ и формированию энергетической стратегии Европейского союза⁶. Ряд работ авторов настоящей статьи посвящен микроэкономическим аспектам приложений теории портфель-

ных инвестиций, укажем, в частности, статью⁷.

1. Эффективный портфель банковских продуктов

В настоящем разделе мы рассмотрим приложения теории портфельных инвестиций для случая, когда рисковыми активами являются банковские продукты. Рассмотрения проводятся на примере реальных данных одного из банков Екатеринбурга.

Как известно, для любого банка характерно производство банковских продуктов, обладающих привлекательными для клиентов свойствами. Возникает вопрос, какие средства следует вкладывать в тот или иной продукт, в тот или иной способ привлечения клиентов.

В рассматриваемом нами банке существует набор из восьми банковских продуктов:

- хранилище ценностей населения (сейф-банк);
- прием и перечисление платежей без открытия счета (коммунальные платежи);
- интернет-банк;
- инкассация;
- денежные переводы по системе Western Union;
- денежные переводы по системе Анелик;
- денежные переводы по системе Мигом;
- пластиковый бизнес.

Для того чтобы применить теорию портфельных инвестиций, необходимо определить доходности каждого продукта. Для этого, в свою очередь, необходимо рассчитать расходы и доходы использования того или иного продукта. Это было сделано следующим образом.

² Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Economic Stud. 1958

³ Merton R.C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. Rev. Econ. Stat. 51, 1969.

⁴ Mossin J. Optimal multiperiod portfolio policies, J. Bus. 41, 1969.

⁵ Helfa, C. Investment choices in industry, MIT, Cambridge, 1988.

⁶ Awerbuch S. Portfolio-based Electricity Generation Planning: Policy Implications for Renewables and Energy Security // Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change, 11(3), 693-710, 2006.

⁷ Никонов О.И., Медведева М.А., Египцев Д.С. Повышение эффективности системы сбыта продукции: математическое моделирование // Вестник УГТУ–УПИ. Серия экономика и управление. 2004. № 4. С.96–103.

Для исчисления и анализа себестоимости банковских продуктов была собрана следующая информация:

- форма 102 (Отчет «О прибылях и убытках»);
- среднесписочная численность сотрудников;
- фонд оплаты труда;
- площадь помещений, занимаемая банком;
- количество ПЭВМ;
- отчетные материалы подразделений банка по доходам и расходам.

Все затраты были сгруппированы по пяти направлениям: расходы по содержанию персонала, расходы по содержанию имущества, расходы на информационное и программное обеспечение, расходы на хозяйственные нужды, прочие накладные расходы.

Далее накладные расходы распределялись по центрам финансовой структуры: 1 группа распределена по сводным данным из Отдела по работе с персоналом; 2 группа – пропорционально занимаемой подразделениями площади; 3 группа – пропорционально количеству ПЭВМ; 4 и 5 группа – пропорционально среднесписочной численности подразделений. В состав финансовой структуры исследуемого КБ входит 3 центра затрат (центры обеспечения, центры обслуживания и центры управления) и 3 бизнес-центра (кредит, депозит и расчетно-кассовый центр).

Центры обеспечения состоят из следующих подразделений: отдел по работе с персоналом, отдел методологии, отдел по финансовому мониторингу, отдел налогов, отдел защиты информации, отдел компьютерных технологий, управление обеспечения деятельности, автотранспортный отдел, служба безопасности.

В центры обслуживания включаются: юридический отдел, управление кассовых операций, валютное управление, отдел учета внутрибанковских операций,

управление сводной отчетности, управление финансового контроля, отдел организации бухучета, управление оценки и контроля рисков, отдел экономического анализа и некоторые другие отделы.

Центр управления состоит из административного управления, управления маркетинга, службы внутреннего контроля, отдела документооборота.

Расходы центров затрат распределяются на бизнес-центры следующим образом: расходы центров обеспечения и центров обслуживания – пропорционально численности ЦФС, а расходы центров управления – в равных долях на все три бизнес-центра. В результате все накладные расходы аккумулируются только на центрах бизнес-направлений.

Далее осуществлялась калькуляция затрат для конкретных продуктов. Для каждого центра определяется соответствующий фактор издержек, согласно которому расходы бизнес-направлений распределялись по продуктам этих направлений. Для калькуляции себестоимости кредитных продуктов в качестве базы для распределения расходов принималось время, затрачиваемое на создание продукта. Для оценки себестоимости депозитных продуктов в качестве базы для распределения расходов можно брать количество заключенных договоров. Затраты на продукты РКЦ первоначально распределяются пропорционально полученным операционным доходам. Далее для оценки себестоимости продуктов кассового обслуживания в качестве базы для распределения расходов принималось количество операций, необходимое для создания продукта. В результате, суммируя прямые прослеживаемые затраты по каждому продукту и распределенные накладные расходы, получили полную себестоимость.

Последним шагом выполнялся расчет эффективности по каждому продукту. Для этого собиралась информация

о полученных операционных доходах за отчетный период. Разница между доходами и издержками и определяет эффективность продукта. На рис. 1 и 2 приведены примеры динамики эффективности для двух продуктов: «сейф-банк» и «коммунальные платежи».

Полученные данные о чистых доходах, связанных с использованием того или иного продукта, обрабатывались с помощью компьютерной программы, реализующей подход Г. Марковица. Программный продукт⁸, разработанный для обработки данных по рынку ценных бумаг, применялся для формирования эффективного портфеля названных

⁸ E. J. Elton, M.J. Gruber Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5-th edition, John Wiley & Sons, Inc. 715 PP.

банковских продуктов. На рис. 3 изображена кривая эффективных портфелей и точка, отвечающая реальному банковскому портфелю. Как видно на рисунке, банковский портфель весьма далек от оптимальности в смысле теории Г. Марковица. Этому есть два объяснения: во-первых, теория не учитывает ограничения на допустимые доли расходов на тот или иной продукт, связанные со стратегическими планами банка, с завоеванием им своей доли рынка. Во-вторых, расчет эффективности производится на основе прошлых данных о доходах по сравнительно новым, еще не успевшим «набрать обороты» услугам, недооценивая, таким образом, усредненный будущий уровень доходно-

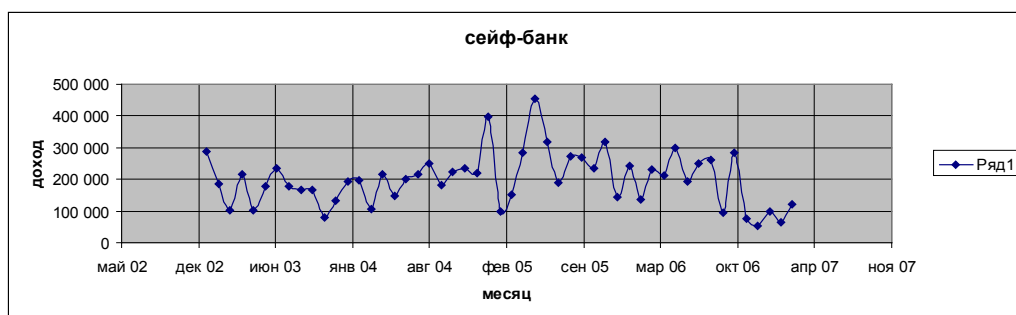


Рис. 1. Динамика эффективности продукта «сейф-банк»



Рис. 2. Динамика эффективности продукта «коммунальные платежи»

сти по ним. Вместе с тем рассматриваемый инструмент позволяет накладывать дополнительные ограничения, учитывающие стратегические интересы банка, проигрывать различные варианты, обосновывать или опровергать гипотезы о

рациональном распределении ресурсов между развитием различных банковских продуктов. Таким образом, предлагаемая методика является, на наш взгляд, эффективным инструментом развития банковского бизнеса.

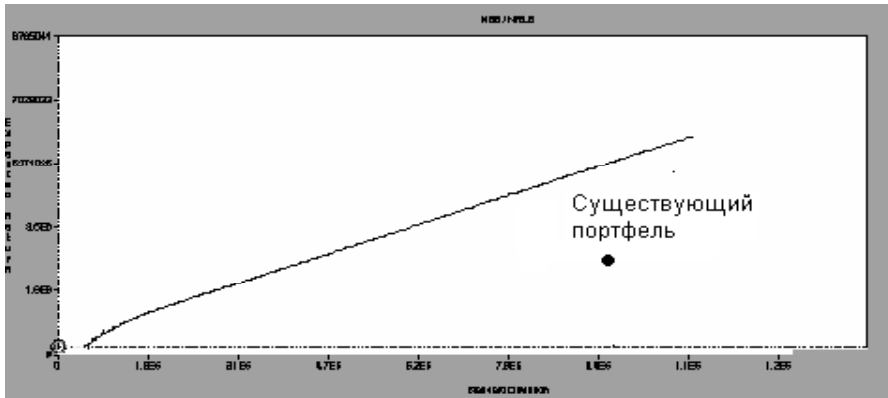


Рис. 3. Кривая эффективных портфелей и положение, отвечающее существующему портфелю

Ожидаемый доход

1822292 . 375 руб.

Стандартное отклонение

990494 . 500 руб.

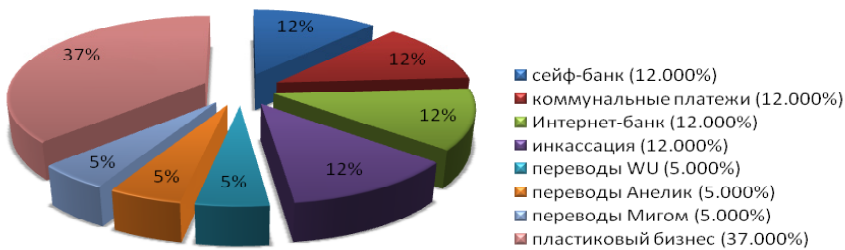


Рис. 4. Существующий портфель рассматриваемых продуктов

Ожидаемый доход

215463 . 938 руб.

Стандартное отклонение

52115 . 992 руб.

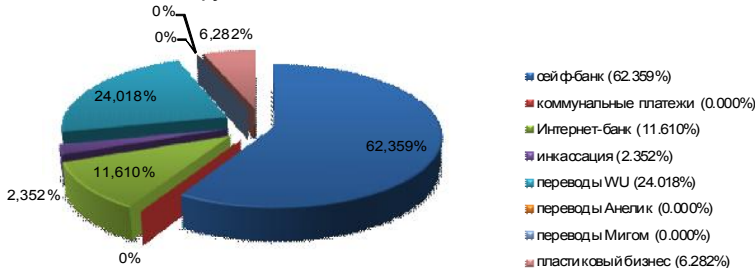


Рис. 5. Структура портфеля с минимальным риском (и минимальным доходом)

3. Эффективные портфели заказов и клиентов фирмы

В настоящем разделе рассматриваются примеры, на первый взгляд не имеющие прямого отношения к теории портфельных инвестиций. Вместе с тем, идейная основа рассмотренных выше случаев и в предлагаемых ниже построениях – одна и та же. В качестве критериев приняты несколько показателей, так же как в случае с классической задачей – два критерия – риск и доходность (доход).

В первом примере мы рассмотрим задачу выбора портфеля заказов компании по транспортировке и поставкам газа, здесь в качестве основных критериев выбраны следующие девять:

- 1) стоимость услуги, выраженная в рублях;
- 2) опыт выполнения аналогичных работ за 2007 год, выраженный в рублях;
- 3) опыт выполнения аналогичных работ за 2007 год, выраженный в количестве;
- 4) расчет персонала для выполнения работ, выраженный в рублях;
- 5) оборотные средства предприятия;
- 6) денежные средства предприятия;
- 7) выручка от реализации за 2007 г.;
- 8) прибыль после уплаты налогов за 2007 год;
- 9) деловая репутация (участие в судебных разбирательствах).

Далее была осуществлена нормировка значений характеристик: например, если стоимость продукции или услуги составляет X_i рублей у контрагента с номером i , а максимальная по всем контрагентам стоимость равна X_{\max} , то в качестве нормированного коэффициента был взят $x_i = \frac{X_i}{X_{\max}}$. Таким

образом, получили, что нормированные значения критерия лежат между нулем и единицей. Данные были переведены

в проценты. Такая нормировка была сделана, чтобы характеристики можно было сравнивать между собой.

В дальнейшем были найдены Парето оптимальные решения по всем девяти показателям одновременно и контрагенты и Парето оптимальные по отдельным показателям и сверткам отдельных показателей. На рис.6 Парето оптимальные решения изображены квадратами, прочие возможные варианты – ромбами.

Второй пример относится к оптимизации деятельности грузоперевозочной компании с условным названием «Карго Сервис», которая принимает участие в работе рынка авиаперевозок в качестве посредника.

Суть деятельности «Карго Сервис» сводится к тому, что компания, являясь посредником, собирает заказы на перевозку у своих клиентов (грузовладельцев), размещает их у своего поставщика, который в свою очередь производит операции по авиаперевозке в Екатеринбург и таможенной очистке. Затем «Карго Сервис» размещает заказы на доставку грузов у российских транспортных компаний, которые доставляют товар до дверей грузовладельца.

Для того чтобы правильно выбрать направление расширения клиентской базы и оценить эффективность существующих клиентов, требуется анализ, способный предоставить оценки клиентам. Одним из методов анализа является построение математической модели, формулировка векторной задачи математического программирования и нахождение ее оптимального решения.

В рамках модели можно сформулировать следующие характеристики полезности f_i^u для клиента:

Ожидаемая прибыль x , приносимая клиентом за один период, $x \equiv f_1^u$.

1. Риск r , характеризующий уровень возможных отклонений прибыли за период, $r \equiv f_2^u$.

Множество оптимальных клиентов определяется как множество аргументов Парето оптимальных векторов $f^u = (f_1^u, f_2^u)$ характеристик клиента.

Ожидаемую прибыль x , которую приносит клиент за период, можно сопоставить с математическим ожиданием μ случайной величины X —прибыли, приносимой клиентом за период (месяц). В качестве оценки математического ожидания можно использовать выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

где n – количество периодов; x_i – значения прибыли, принесенной клиентом за прошедшие периоды.

Риску r , который характеризует уровень возможных отклонений прибыли, приносимой клиентом в месяц от ожидаемой прибыли, можно сопоставить среднеквадратическое отклонение σ прибыли X , приносимой клиентом в месяц. В качестве оценки среднеквадратического отклонения можно использовать корень из выборочной дисперсии:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

где n – количество периодов;

x_i – значения прибыли, принесенной клиентом за прошедшие периоды;

\bar{x} – выборочное среднее.

Для анализа были выбраны данные постоянных клиентов, т. е. клиентов, которые сотрудничают с компанией в течение всего анализируемого периода. Вклад таких клиентов в суммарную прибыль компании «Карго Сервис» за рассматриваемый период составляет 87,2 %. Данные анализировались по 4062 поставкам. Исходные данные были взяты из базы данных, в которой ведется учет всех поставок клиентов. Расчеты произведены средствами программных продуктов MS Access, MS Excel, MathSoft MathCad и Statistica 6.0. Среди выбранных клиентов такие компании, как Alfa VIP, Boutique Bulvar, Elizabeth, La Scala и др. В табл. 1 названия реальных компаний зашифрованы номерами.

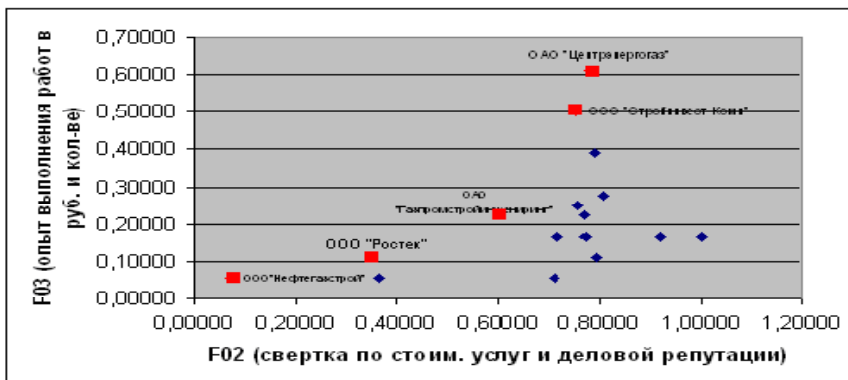


Рис. 6. Точечная диаграмма зависимости свертки по опыту выполнения работ в руб. и количестве и свертки по стоимости услуг и деловой репутации

Таблица 1
Сводная таблица характеристик клиентов «Карго Сервис»

Клиент	Ожидаемая прибыль x , [€]	Риск, r , [€]
N1	376,7	0,867952
N2	1457,77	1,40053
N3	2361,97	0,873183
N4	732,62	1,134245
N5	524,49	1,152953
N6	204,06	0,955024
N7	538,89	0,934097
N8	1426,24	1,35835
N9	474,54	1,686953
N10	742,92	1,265514
N11	7757,81	1,326137
N12	5055,61	1,677231
N13	1621,94	1,823285
N14	953,54	1,087734
N15	3040,49	1,375296
N16	1861,08	1,237823
N17	1506,57	1,204341
N18	1066,91	1,101531
N19	199,21	0,984774
N20	1940,07	1,079418
N21	2064,03	1,59525

Таблица 2
Клиенты, оптимальные по Парето

Клиент	Ожидаемая прибыль x , [€]	Риск, r
N1	376,7	0,868
N3	2362	0,873
N11	7757,8	1,326
N12	5055,6	1,677
N20	1940,1	1,079

Дальнейший анализ осуществлялся с учетом степени привлекательности клиентов для сотрудников компании, что, в свою очередь, реализовывалось с

помощью их анкетирования. Выбранным оказался Парето оптимальный клиент N1, который считается стратегически важным для компании.